RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN.

«Quien quiere hacer algo encuentra un medio; quien no quiere hacer nada encuentra una excusa». **(Proverbio chino)**

«La matemática ha constituido, tradicionalmente, la tortura de los escolares del mundo entero, y la humanidad ha tolerado esta tortura para sus hijos como un sufrimiento inevitable para adquirir un conocimiento necesario; pero la enseñanza no debe ser una tortura, y no seríamos buenos profesores si no procuráramos, por todos los medios, transformar este sufrimiento en goce, lo cual no significa ausencia de esfuerzo, sino, por el contrario, alumbramiento de estímulos y de esfuerzos deseados y eficaces». **(Puig Adam, 1958)**

Matemáticas es la única asignatura que se estudia en todos los países del mundo y en todos los niveles educativos. Supone un pilar básico de la enseñanza en todos ellos. La causa fundamental de esa universal presencia hay que buscarla en que las matemáticas constituyen un idioma «poderoso, conciso y sin ambigüedades» (según la formulación del Informe Cockroft, 1985). Ese idioma se pretende que sea aprendido por nuestros alumnos, hasta conseguir que lo "hablen". En general por medio de la contemplación de cómo los hacen otros (sus profesores), y por su aplicación a situaciones muy sencillas y ajenas a sus vivencias (los ejercicios).

La utilización de un idioma requiere de unos conocimientos mínimos para poder desarrollarse, por supuesto. Pero sobre todo se necesitan situaciones que inviten a comunicarse por medio de ese idioma, a esforzarse en lograrlo, y, desde luego, de unas técnicas para hacerlo. En el caso del idioma matemático, una de las técnicas fundamentales de comunicación son los métodos de Resolución de Problemas.

Volver al índice

2. IDEAS, TENDENCIAS, CREENCIAS, ETC. SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

La resolución de problemas es considerada en la actualidad la parte más esencial de la educación matemática. Mediante la resolución de problemas, los estudiantes experimentan la potencia y utilidad de las Matemáticas en el mundo que les rodea.

- **El párrafo 243 del Informe Cockroft señala en su punto quinto que la enseñanza de las Matemáticas debe considerar la *«resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las mismas situaciones de la vida diaria»*.**

- **El N.C.T.M. de Estados Unidos, declaraba hace más de diez años que *«el objetivo fundamental de la enseñanza de las Matemáticas no debería ser otro que el de la resolución de problemas»*.**

- **En el libro de Hofsdadter, Gödel, Escher y Bach, se dice que *«las capacidades básicas de la inteligencia se favorecen desde las Matemáticas a partir de la resolución de problemas, siempre y cuando éstos no sean vistos como situaciones que requieran una respuesta única (conocida previamente por el profesor que encamina hacia ella), sino como un proceso en el que el alumno estima, hace conjeturas y sugiere explicaciones»*.**

- **Santaló (1985), gran matemático español y además muy interesado en su didáctica, señala que *«enseñar matemáticas debe ser equivalente a enseñar a resolver problemas. Estudiar matemáticas no debe ser otra cosa que pensar en la solución de problemas»*.**

- **En una conferencia pronunciada en 1968 George Polya decía: *«Está bien justificado que todos los textos de matemáticas, contengan problemas. Los problemas pueden incluso considerarse como la parte más esencial de la educación matemática»*.**

- **M. de Guzmán (1984) comenta que *«lo que sobre todo deberríamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos. ¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en que quepan unos cuantos teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente emparedados? A la resolución de problemas se le ha llamdo, con razón, el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha traído y atre a los matemáticos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas, en una palabra, la vida propia de las matemáticas»*.**

- **En España, el currículo del Área de Matemáticas en Primaria y Secundaria concede extraordinaria importancia al tema dedicándole mucha atención, especialmente desde los contenidos de procedimientos y actitudes.**

Aunque no es sencillo, y quizás parezca superfluo, para entendernos es interesante delimitar,

siquiera sea en grandes rasgos, qué es lo que entendemos por problema. Pero, como la palabra "problema" se usa en contextos diferentes y con matices diversos, haremos un esfuerzo por clarificar a qué nos referimos.

No aportan mucha claridad las definiciones de los diccionarios generales. Nos acerca más al sentido de qué es un problema la expresión de "problema de letra" que los alumnos emplean con frecuencia: son aquellos que hacen referencia a contextos ajenos a las matemáticas propiamente dichas, los que llevan dentro una cierta "historia", que se pueden contar. Los que abren las ventanas del aula y hacen un puente (aunque sea frágil) entre las matemáticas y la vida.

Pero no es el único aspecto a destacar. También hay que caracterizar los "problemas" por oposición a los ejercicios (algo bien conocido por los alumnos porque constituye el núcleo fundamental de su quehacer matemático).

En los ejercicios se puede decidir con rapidez si se saben resolver o no; se trata de aplicar un algoritmo, que pueden conocer o ignorar. Pero, una vez localizado, se aplica y basta. Justamente, la proliferación de ejercicios en clase de matemáticas ha desarrollado y arraigado en los alumnos un síndrome generalizado; en cuanto se les plantea una tarea a realizar, tras una somera reflexión, contestan: "lo sé" o "no lo sé", según hayan localizado o no el algoritmo apropiado. Ahí acaban, en general, sus elucubraciones.

En los problemas no es evidente el camino a seguir; incluso puede haber varios; y desde luego no está codificado y enseñado previamente. Hay que apelar a conocimientos dispersos, y no siempre de matemáticas; hay que relacionar saberes procedentes de campos diferentes, hay que poner a punto relaciones nuevas.

Por tanto, un "problema" sería una cuestión a la que no es posible contestar por aplicación directa de ningún resultado conocido con anterioridad, sino que para resolverla es preciso poner en juego conocimientos diversos, matemáticos o no, y buscar relaciones nuevas entre ellos. Pero además tiene que ser una cuestión que nos interese, que nos provoque las ganas de resolverla, una tarea a la que estemos dispuestos a dedicarle tiempo y esfuerzos. Como consecuencia de todo ello, una vez resuelta nos proporciona una sensación considerable de placer. E incluso, sin haber acabado el proceso, sin haber logrado la solución, también en el proceso de búsqueda, en los avances que vamos realizando, encontraremos una componente placentera.

Aunque los rasgos fundamentales de lo que entendemos por problema están descritos en el párrafo anterior, todavía creemos conveniente añadir algunos comentarios adicionales sobre los mismos:

- **Los algoritmos que se suelen explicar en clase, o que aparecen en los libros de texto, resuelven grupos enteros de problemas. Lo que pasa es que si no situamos previamente los problemas a los que responden, estamos dando la respuesta antes de que exista la pregunta. Y en ese contexto no es difícil de adivinar el poco interés con que se recibe la misma.**

- **Las situaciones existen en la realidad. Los problemas los alumbramos nosotros. Pasan a ese estatus cuando los asumimos como un reto personal y decidimos en consecuencia dedicarle tiempo y esfuerzos a procurar resolverlos.**

- **La resolución de un problema añade algo a lo que ya conocíamos; nos proporciona relaciones nuevas entre lo que ya sabíamos o nos aporta otros puntos de vista de situaciones ya conocidas. Suponen el aporte de la chispa de la creatividad, aquella que aparece de cuando en cuando, y que logra, por utilizar la expresión de Koestler (1983), que dos y dos son cinco.**

Resaltemos una vez más la fuerte componente de compromiso personal en los problemas, y la importancia que tiene la manera en que se nos presenten para que lo asumamos como tales. Todo ello es de particular interés en la enseñanza, porque de cómo se plantea la cuestión, el contexto en que se sitúe y de la "tecnología" expositiva utilizada depende, en un porcentaje muy importante, el que un problema pase a ser considerado como tal por nuestros alumnos.

Volver al índice

3. RASGOS QUE CARACTERIZAN A LOS BUENOS PROBLEMAS.

Una vez que tenemos un problema, los hay mejores y peores, vamos a referirnos a los rasgos que caracterizan a los buenos problemas. Reseñamos y comentamos los más importantes (Grupo Cero, 1984):

- **No son cuestiones con trampas ni acertijos. Es importante hacer esta distinción en la enseñanza porque los alumnos, cuando se les plantean problemas, tienden a pensar que si no hay (o al menos ellos no lo recuerdan directamente) un algoritmo para abordarlos ni se les ocurre ningún procedimiento, seguro que lo que sucede es que tiene que haber algún tipo de truco o de "magia". La práctica sistemática resolviendo problemas hace que esa percepción habitual vaya cambiando.**

- **Pueden o no tener aplicaciones, pero el interés es por ellos mismos. Así como hay otras cuestiones cuya importancia proviene de que tienen un campo de aplicaciones (y sin descartar que los problemas las tengan), el interés de los problemas es por el propio proceso. Pero a pesar de ello, los buenos problemas suelen llevar a desarrollar procesos que, más tarde, se pueden aplicar a muchos otros campos.**

- **Representan un desafío a las cualidades deseables en un matemático. Parece obvio para todo el mundo que existen unas cualidades que distinguen a las personas que resuelven problemas con facilidad, aunque si se tienen que señalar cuáles son, es bien dificultoso hacerlo. Y se tiende a pensar que coinciden en líneas generales con las cualidades propias de los matemáticos.**

- **Una vez resueltos apetece proponerlos a otras personas para que a su vez intenten resolverlos. Pasa como con los chistes que nos gustan, que los contamos enseguida a otros, y así se van formando cadenas que explican su rápida difusión. Lo mismo sucede con los buenos problemas.**

- **Parecen a primera vista algo abordable, no dejan bloqueado, sin capacidad de reacción. Y puede pasar que alguna solución parcial sea sencilla o incluso inmediata. Desde un punto de vista psicológico, sólo nos planteamos aquello que somos capaces (o al menos eso creemos) de resolver. Por eso, si un problema sólo lo es para nosotros cuando lo aceptamos como tal, difícil es que nos "embarquemos" en una aventura que nos parezca superior a nuestras fuerzas.**

- **Proporcionan al resolverlos un tipo de placer difícil de explicar pero agradable de experimentar. La componente de placer es fundamental en todo desafío intelectual, si se quiere que sea asumido con gusto y de manera duradera. Incluso, en la enseñanza, la incorporación de esos factores a la práctica diaria pueden prefigurar la inclinación de los estudios futuros. Y no hay que olvidar que las matemáticas son de las materias que no dejan indiferente, se las quiere o se las odia (como aparece en múltiples estudios). Por ello más vale que introduzcamos refuerzos positivos para hacer que aumenten los que las aprecian.**

Volver al índice

4. PAUTAS A SEGUIR EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Una vez señaladas las características de los buenos problemas, hay que referirse a la importancia que tiene resolver problemas en clase. Pensemos, que, como dice Polya (1945) *«sólo los grandes descubrimientos permiten resolver los grandes problemas, hay, en la solución de todo problema, un poco de descubrimiento»; pero que, si se resuelve un problema y llega a excitar nuestra curiosidad, «este género de experiencia, a una determinada edad, puede determinar el gusto del trabajo intelectual y dejar, tanto en el espíritu como en el carácter, una huella que durará toda una vida»*.

Para resolver problemas no existen fórmulas mágicas; no hay un conjunto de procedimientos o métodos que aplicándolos lleven necesariamente a la resolución del problema (aún en el caso de que tenga solución). Pero de ahí no hay que sacar en consecuencia una apreciación ampliamente difundida en la sociedad: la única manera de resolver un problema sea por "ideas luminosas", que se tienen o no se tienen.

Es evidente que hay personas que tienen más capacidad para resolver problemas que otras de su misma edad y formación parecida. Que suelen ser las que aplican (generalmente de una manera inconsciente) toda una serie de métodos y mecanismos que suelen resultar especialmente indicados para abordar los problemas. Son los, procesos que se llaman "heurísticos": operaciones mentales que se manifiestan típicamente útiles para resolver problemas. El conocimiento y la práctica de los mismos es justamente el objeto de la resolución de problemas, y hace que sea una facultad entrenable, un apartado en el que se puede mejorar con la práctica. Pero para ello hay que conocer los procesos y aplicarlos de una forma planificada, con método.

Es ya clásica, y bien conocida, la formulación que hizo Polya (1945) de las cuatro etapas

esenciales para la resolución de un problema, que constituyen el punto de arranque de todos los estudios posteriores:

1. <u>COMPRENDER EL PROBLEMA</u>. Parece, a veces, innecesaria, sobre todo en contextos escolares; pero es de una importancia capital, sobre todo cuando los problemas a resolver no son de formulación estrictamente matemática. Es más, es la tarea más difícil, por ejemplo, cuando se ha de hacer un tratamiento informático: entender cuál es el problema que tenemos que abordar, dados los diferentes lenguajes que hablan el demandante y el informático.

- **Se debe leer el enunciado despacio.**
- **¿Cuáles son los datos? (lo que conocemos)**
- **¿Cuáles son las incógnitas? (lo que buscamos)**
- **Hay que tratar de encontrar la relación entre los datos y las incógnitas.**
- **Si se puede, se debe hacer un esquema o dibujo de la situación.**

2. <u>TRAZAR UN PLAN PARA RESOLVERLO</u>. Hay que plantearla de una manera flexible y recursiva, alejada del mecanicismo.

- **¿Este problema es parecido a otros que ya conocemos?**
- **¿Se puede plantear el problema de otra forma?**
- **Imaginar un problema parecido pero más sencillo.**
- **Suponer que el problema ya está resuelto; ¿cómo se relaciona la situación de llegada con la de partida?**
- **¿Se utilizan todos los datos cuando se hace el plan?**

3. <u>PONER EN PRÁCTICA EL PLAN</u>. También hay que plantearla de una manera flexible y recursiva, alejada del mecanicismo. Y tener en cuenta que el pensamiento no es lineal, que hay saltos continuos entre el diseño del plan y su puesta en práctica.

- **Al ejecutar el plan se debe comprobar cada uno de los pasos.**
- **¿Se puede ver claramente que cada paso es correcto?**
- **Antes de hacer algo se debe pensar: ¿qué se consigue con esto?**
- **Se debe acompañar cada operación matemática de una explicación contando lo que se hace y para qué se hace.**
- **Cuando se tropieza con alguna dificultad que nos deja bloqueados, se debe volver al principio, reordenar las ideas y probar de nuevo.**

4. <u>COMPROBAR LOS RESULTADOS</u>. Es la más importante en la vida diaria, porque supone la confrontación con contexto del resultado obtenido por el modelo del problema que hemos realizado, y su contraste con la realidad que queríamos resolver.

- **Leer de nuevo el enunciado y comprobar que lo que se pedía es lo que se ha averiguado.**
- **Debemos fijarnos en la solución. ¿Parece lógicamente posible?**
- **¿Se puede comprobar la solución?**
- **¿Hay algún otro modo de resolver el problema?**
- **¿Se puede hallar alguna otra solución?**
- **Se debe acompañar la solución de una explicación que indique claramente lo que se ha hallado.**
- **Se debe utilizar el resultado obtenido y el proceso seguido para formular y plantear**

nuevos problemas.

Hay que pensar que no basta con conocer técnicas de resolución de problemas: se pueden conocer muchos métodos pero no cuál aplicar en un caso concreto. Por lo tanto hay que enseñar también a los alumnos a utilizar los instrumentos que conozca, con lo que nos encontramos en un nivel metacognitivo, que es donde parece que se sitúa la diferencia entre quienes resuelven bien problemas y los demás.

Dentro de las líneas de desarrollo de las ideas de Polya, Schoenfeld da una lista de técnicas heurísticas de uso frecuente, que agrupa en tres fases, y que extractamos:

ANÁLISIS.

1. **Trazar un diagrama.**
2. **Examinar casos particulares.**
3. **Probar a simplificar el problema.**

EXPLORACIÓN.

1. **Examinar problemas esencialmente equivalentes.**
2. **Examinar problemas ligeramente modificados.**
3. **Examinar problemas ampliamente modificados.**

COMPROBACIÓN DE LA SOLUCIÓN OBTENIDA.

1. **¿Verifica la solución los criterios específicos siguientes?:**
   a) **¿Utiliza todos los datos pertinentes?**
   b) **¿Está acorde con predicciones o estimaciones razonables?**
   c) **¿Resiste a ensayos de simetría, análisis dimensional o cambio de escala?**
2. **¿Verifica la solución los criterios generales siguientes?:**
   a) **¿Es posible obtener la misma solución por otro método?**
   b) **¿Puede quedar concretada en caso particulares?**
   c) **¿Es posible reducirla a resultados conocidos?**
   d) **¿Es posible utilizarla para generar algo ya conocido?**

Finalmente, hacemos una recopilación de las estrategias más frecuentes que se suelen utilizar en la resolución de problemas. Según S. Fernández (1992) serían:

- **Ensayo-error.**
- **Empezar por lo fácil, resolver un problema semejante más sencillo.**
- **Manipular y experimentar manualmente.**
- **Descomponer el problema en pequeños problemas (simplificar).**
- **Experimentar y extraer pautas (inducir).**
- **Resolver problemas análogos (analogía).**
- **Seguir un método (organización).**

- **Hacer esquemas, tablas, dibujos (representación).**
- **Hacer recuente (conteo).**
- **Utilizar un método de expresión adecuado: verbal, algebraico, gráfico, numérico (codificar, expresión, comunicación).**
- **Cambio de estados.**
- **Sacar partido de la simetría.**
- **Deducir y sacar conclusiones.**
- **Conjeturar.**
- **Principio del palomar.**
- **Analizar los casos límite.**
- **Reformular el problema.**
- **Suponer que no (reducción al absurdo).**
- **Empezar por el final (dar el problema por resuelto).**

Para terminar sólo queremos hacer dos consideraciones. La primera hace referencia a que el contexto en el que se sitúen los problemas, que por parte de los profesores se tienden a considerar como irrelevante o, al menos como poco significativo, tiene una gran importancia, tanto para determinar el éxito o fracaso en la resolución de los mismos, como para incidir en el futuro de la relación entre las matemáticas y los alumnos. La segunda, que parece una perogrullada, es que la única manera de aprender a resolver problemas es resolviendo problemas; es muy bueno conocer técnicas y procedimientos, pero vistos en acción, no sólo a nivel teórico, porque si no, es un conocimiento vacío. Luego, hay que hacer cuantos esfuerzos sean precisos para que la resolución de problemas sea el núcleo central de la enseñanza matemática.

Volver al índice

5. DESARROLLO DE ALGUNAS ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Si consideramos un problema como una situación que se presenta en la que se sabe más o menos, o con toda claridad, a dónde se quiere ir, pero no se sabe cómo; entonces resolver un problema es precisamente aclarar dicha situación y encontrar algún camino adecuado que lleve a la meta.

A veces no sabremos si la herramienta adecuada para la situación está entre la colección de técnicas que dominamos o ni siquiera si se ha creado una técnica que pueda ser suficientemente potente para resolver el problema. Esta es precisamente la circunstancia del investigador, en matemáticas y en cualquier otro campo, y, por otra parte, ésta es la situación en la que nos encontramos a veces en nuestra vida normal.

La destreza para resolver genuinos problemas es un verdadero arte que se aprende con paciencia y considerable esfuerzo, enfrentándose con tranquilidad, sin angustias, a multitud de problemas diversos, tratando de sacar el mejor partido posible de los muchos seguros fracasos iniciales, observando los modos de proceder, comparándolos con los de los expertos y

procurando ajustar adecuadamente los procesos de pensamiento a los de ellos. Es la misma forma de transmisión que la de cualquier otro arte, como el de la pintura, la música, etc.

Las estrategias que tendremos ocasión de aprender y ejercitar son:

A. Comenzar resolviendo un problema semejante más fácil.
B. Hacer experimentos, observar, busca pautas, regularidades ... Hacer conjeturas. Tratar de demostrarlas.
C. Dibujar una figura, un esquema, un diagrama.
D. Escoger un lenguaje adecuado, una notación apropiada.
E. Inducción.
F. Supongamos que no es así.
G. Supongamos el problema resuelto.
H. Si tenemos una receta y estamos seguros de que se ajusta al problema, aplíquémosla.

A. COMENZAR RESOLVIENDO UN PROBLEMA SEMEJANTE MÁS FÁCIL.

Esta estrategia se practica en multitud de circunstancias. El niño que aprende a andar en bicicleta no intenta lanzarse cuesta abajo por su cuenta a gran velocidad. Empieza con un triciclo para atender primero el problema de los pedales y del volante. Luego vendrá el problema del equilibrio y se ensayará con dos ruedas. Si se aprende a conducir un coche, lo mejor es circular primero despacio, sin necesidad de cambiar marchas, y en descampado, para poder jugar con el volante. Ya vendrán luego los problemas conduciendo en la calle.

En matemáticas sucede lo mismo. Si estudiamos derivadas, primero, las haremos sencillas, la de un monomio como x2, ... , luego pasamos a un polinomio y cuando sentimos cierta familiaridad con el proceso, nos lanzamos más lejos.

Un problema puede resultar difícil por su tamaño, por tener demasiados elementos que lo hacen enrevesado y oscuro. Para empezar, debemos resolver un problema semejante lo más sencillo posible. Luego lo complicaremos hasta llegar al propuesto inicialmente.

Procediendo así, obtenemos varios provechos:

a) De orden psicológico. Empezamos animándonos con el probable éxito.
b) De orden racional. En el problema sencillo suelen aparecer, más transparentes, principios de solución que estaban confusos y opacos en medio de la complejidad del problema inicial.
c) Manipulación más fácil. La manipulación efectiva en un problema de pocas piezas es más fácil que en uno de muchas.

La simplificación de un problema se puede lograr no sólo reduciendo su tamaño, sino también imponiendo alguna condición adicional que no está en el problema propuesto. Incluso, aunque parezca al principio que tu simplificación es demasiado drástica, se comprueba con frecuencia cómo la ayuda del problema simplificado es muy efectiva.