

El privilegio de enseñar Matemáticas

Por Rafael Pérez, Universidad de Granada

A nuestro queridísimo Miguel de Guzmán Ozámiz

Razones para enseñar y estudiar Matemáticas

¿Por qué es un privilegio enseñar Matemáticas? En todas las culturas y en todos los tiempos modernos, las Matemáticas han ocupado un lugar predominante en los currículos escolares. Han alcanzado este protagonismo no tanto por el interés que tienen en sí mismas como por razones de tipo cultural y social. Es tal la importancia lograda que prácticamente se enseñan en todas las escuelas del mundo.

Tradicionalmente han existido dos razones básicas para enseñar Matemáticas:

a) **Su facultad para desarrollar la capacidad de pensamiento.**

Luis Vives, s. XVI, ya señaló que *"son una asignatura para manifestar la agudeza de la mente"*. En el momento actual se sabe que su incidencia en el desarrollo de la capacidad de razonamiento de una persona depende del modo en que se enseñen (Cockcroft, **Las Matemáticas sí cuentan**, MEC 1985).

b) **Su utilidad, tanto para la vida cotidiana como para el aprendizaje de otras disciplinas necesarias para el desarrollo personal y profesional.**

*"Las Matemáticas parecen poseer el asombroso poder de **explicar cómo funcionan las cosas**, por qué son como son y qué nos revelaría el Universo si fuésemos capaces de escuchar"*. (Cole, **El universo y la taza de té. Las matemáticas de la verdad y la belleza**, Ediciones B, 1999). Esto entronca de lleno con el pensamiento griego que dio explicación desde las Matemáticas de ciertos aspectos observables en un mundo relativamente sencillo como el que entonces se observaba. Ahora

se ocupan de hacerlo con otro más complejo. El desarrollo de la Geometría posibilitó la creación de modelos para **representarlo**.

Pero, además, las Matemáticas son una herramienta de gran utilidad para **predecir**. Desde predicciones de fenómenos como eclipses o alineaciones de astros hasta de posibles composiciones atómicas que han permitido la búsqueda de nuevos materiales, pasando por todo lo relativo al mundo de las encuestas, son muchas las situaciones que nos resultan familiares.

En resumen, desde las Matemáticas se **explican, representan y predicen** hechos.

Actualmente, cabe considerar dos razones más:

c) Si nos salimos de su aplicabilidad en tareas cotidianas, no es menos cierto que existe una razón de orden práctico para su presencia en la formación de personas, a muy distinto nivel: **son necesarias para desarrollar habilidades laborales y dar respuesta a cuestiones científicas y tecnológicas**. Desde este punto de vista, y puesto que afectan a los conocimientos esenciales para la práctica ciudadana responsable y efectiva, surge el llamado "enfoque cultural" de la enseñanza de las Matemáticas que pasa, necesariamente, por enseñarlas en contextos sociales de interés para quienes han de aprenderlas.

d) Las Matemáticas como **medio de comunicación**.

Comenta Carl Sagan en **Cosmos** (Planeta, 1982) que hay un lenguaje común para todas las civilizaciones técnicas, por muy diferentes que sean, y éste es el de la ciencia, en general, y el de las Matemáticas, en particular. La razón está en que las leyes de la Naturaleza son idénticas en todas partes. Al pensar sobre este aspecto tan interesante, vienen a nuestra mente imágenes de ecuaciones, símbolos y figuras que están escritos en un lenguaje universal utilizado en cualquier parte del mundo. Este carácter que tiene de metalenguaje es lo que realmente ha hecho

que el lenguaje matemático sea el lenguaje de las ciencias y la tecnología. En **Viaje de la Tierra a la Luna**, obra de Julio Verne que se publicó en 1865 (Euroliber, 1990) se dice que una forma de comprobar si los selenitas eran inteligentes consistía en que, una vez que se produjese el encuentro, había que dibujarles "el molino de viento" (en alusión a la demostración del teorema de Pitágoras) y comprobar si lo reconocían. Quizá sea por ello por lo que las naves exploratorias Voyager, que desde 1977 buscan vidas inteligentes fuera de nuestro planeta, llevan ejemplos de Matemáticas en la información sobre la vida en la Tierra.

Pero este aspecto es evidente, por lo que conviene salir del ámbito científico para ver cómo se utilizan los conceptos matemáticos para comunicar ideas y sentimientos. Quienes mejor comunican, y han comunicado siempre, son los escritores y, en general, los artistas. En este mundo, las Matemáticas siempre han estado presentes. Aparecen en Literatura, Poesía, Música, Pintura, Escultura, Arquitectura, Cine,... Como con un botón de muestra basta, sólo recordaré a J. L. Borges. Es consustancial al ser humano el pensamiento sobre el infinito (nosotros solemos decir que mientras no esté presente el infinito, aún no estamos hablando de Matemáticas). Borges realizó dos ensayos, **La perpetua carrera de Aquiles y la tortuga** y **Avatares de la tortuga** (Alianza, 1995) en los que fabuló sobre las paradojas y el infinito, tema que forma parte de **El jardín de senderos que bifurcan** (Alianza, 1992), de **Otras inquisiciones** (Alianza, 1989) o de **El libro de arena** (Alianza, 1995) donde escribe:

"La línea consta de un número infinito de puntos; el plano de un número infinito de líneas; el volumen, de un número infinito de planos; el hipervolumen, de un número infinito de volúmenes... No, decididamente no es éste, more geométrico, el mejor modo de iniciar mi relato."

Aunque, desde mi punto de vista, es en **La Biblioteca de Babel** (Alianza, 1992) donde expresa aspectos esenciales de la matemática

transfinita para poner de manifiesto, en un ejercicio de audacia e inteligencia (todos hemos bromeado diciendo que mientras el infinito no está presente, aún no estamos haciendo Matemáticas), la grandeza y, a la vez, la pequeñez del ser humano que puede construir en su mente un mundo perfecto e irreal en el que sus malas acciones llegan a tener repercusiones infinitesimales y, por tanto, intrascendentes en este mundo infinito. Considera el narrador que la Biblioteca es infinita y se plantea la existencia del catálogo de catálogos. Evidentemente, nos recuerda a Georg Cantor (1845-1918) cuando, en boca de Russell, definió un conjunto infinito: *"Un conjunto de términos es infinito cuando contiene como partes otros conjuntos que tienen tantos términos como él"*.

Para finalizar esta breve excursión por este universo borgiano, recordaré que en la obra se alude a que unas personas han destruido los anaqueles de la Biblioteca ante lo cual el narrador alude a la inutilidad de tal hecho, ya que la Biblioteca es tan enorme que toda reducción de origen humano resulta infinitesimal ya que, al ser la Biblioteca infinita, existe un teorema que afirma que la diferencia entre un conjunto infinito –los libros de la Biblioteca– y cualquiera de sus partes finitas –los destruidos por un número finito de personas han de formar un conjunto finito– es un conjunto infinito.

No es este momento el indicado para seguir presentando cómo utilizan el resto de las Artes a las Matemáticas como un lenguaje adecuado para comunicar. Antes bien, quiero sacar a relucir un párrafo que figura en el **Proyecto P.I.S.A. 2000** (Programa Internacional para la Evaluación de los Resultados del Alumnado) se dice:

En la sociedad moderna, la necesidad apremiante de desarrollar una ciudadanía que esté formada matemática, científica y tecnológicamente es muy similar a los antiguos argumentos para el logro de niveles básicos de competencia de lectura y escritura en los adultos; (...) y la formación básica matemática y científica "convierte a los individuos en

menos dependientes de los demás, de modo que los procesos democráticos, los valores sociales y las oportunidades individuales no lleguen a ser dominados por las élites ilustradas” (Krugly-Smolska, 1990).

En la misma línea argumental, Martín Rees, astrofísico que se ha mantenido en la vanguardia de los debates cosmológicos, afirma que en la actualidad es obvio que *existe una separación importante entre quienes se desenvuelven bien con las matemáticas y quienes no* en una referencia a la necesidad del conocimiento matemático para el desarrollo de las personas dentro de la sociedad actual en la que existe una cultura emergente, conocida con **La Tercera Cultura** (Tusquets Editores, 1996), que no hace distinción entre “letras y ciencias”.

Todos los argumentos convergen en la necesidad de desarrollar el pensamiento matemático entre nuestro alumnado.

Por tanto, como idea fundamental para la clase de Matemáticas, no debemos olvidar que la Educación Matemática implica tanto el desarrollo de destrezas, procedimientos y métodos propios de las Matemáticas, como el estímulo de procesos de pensamiento matemático que fomenten en el alumnado su capacidad de análisis, de razonamiento y de expresión, que les faculte para preguntar y hacerse preguntas ante situaciones problemáticas.

Para mí, esta es la principal razón para que las Matemáticas formen parte de cualquier currículo y es por lo que nuestro trabajo tiene gran interés educativo: **enseñar a pensar bien** porque **las Matemáticas son el Arte de pensar bien**.

¿Conseguimos despertar ese interés en el alumnado? Sin acritud, y excluyendo a quienes están interesados en incorporar (o lo han hecho ya) nuevas didácticas a sus clases, y con todo el respeto que da el reconocimiento a la labor honesta del profesorado de Matemáticas, de este país y de otros, he de decir que, en general, no. Me explico. Por un lado, el profesorado de Matemáticas universitario, normalmente, considera que los contenidos que ha

de explicar en un curso de Biológicas o de Química, por ejemplo, deben ser unas Matemáticas Generales (Álgebra Lineal, Cálculo Infinitesimal, Ecuaciones Diferenciales y Estadística) que difieren de las explicadas en la licenciatura de Matemáticas en el grado de profundidad (léase: pocas demostraciones y más ejercicios). Por otro, en los niveles no universitarios el apoyo en el libro de texto que repite desde hace décadas casi los mismos contenidos enmascarados en "renovados" diseños curriculares -números naturales, enteros, racionales y reales para el desarrollo teórico y las correspondientes "orgías" de ejercicios (con todo lujo de torres de fracciones, radicales, etc.) para la práctica; ecuaciones de rectas, planos y otros lugares geométricos; funciones acompañadas de "epsilon y delta"; ejercicios de álgebra tan maravillosos como inútiles; y, por último, un tratamiento del azar tan teórico que el propio profesorado duda cuando experimenta, si es que alguna vez se le brinda la ocasión para que lo haga, acerca de si "saldrá bien el experimento"- hace que se enseñen año tras año idénticos contenidos y de forma también idéntica: tiza, pizarra y monólogo de espaldas al alumnado. Ni unos ni otros consiguen entusiasmar desde sus propuestas a quienes han de aprender Matemáticas.

Año tras año hacemos lo que sabemos hacer muy bien después de estar toda una vida repitiéndolo, actuando por imitación de quienes hicieron lo mismo con nosotros -es decir, nuestros profesores y profesoras- "que no debieron hacerlo tan mal cuando a mi me fue bien". ¡Perfecto!, pero demasiado cómodo porque de esta forma, nada debe cambiar. ¿Es posible imaginar al mejor de los cantantes interpretando siempre la misma canción? O, mejor aún. Quienes tenemos hijos o hijas deseamos que su salud sea la mejor posible (obsérvese que hablo de salud, que no de enfermedad) de modo que si, por ejemplo, pensamos en su salud buco-dental, ¿buscaría a un especialista que trabajase exactamente igual que cuando comenzó su vida profesional? Evidentemente, la respuesta es no; buscamos un especialista que esté al día en su profesión, lo cual implica reciclaje en cuanto a conocimientos, métodos e instrumental clínico. ¿Por qué en Educación no se exige igual actualización? ¡Qué preguntas tengo tan tontas!, ¿verdad? "¡Pues porque socialmente no están igualmente consideradas las profesiones!", dirá la mayoría. Aún aceptando lo que de cierto tiene la respuesta, en la profesión de profesor o profesora hay una

componente esencial que no tiene valoración en la sociedad actual porque no interesa por el modelo marcado, salvo en casos concretos que están en la mente de todos. Me refiero a la capacidad de alcanzar cambios radicales en la sociedad desde la Educación en cualquier nivel:

- a) Desde Primaria y Secundaria, fundamentalmente, podemos abordar la inmensa tarea de enseñar a resolver problemas como hacemos los profesionales: reconociendo el problema, formulándolo en términos precisos, utilizando heurísticos que permitan elaborar conjeturas acerca de su posible solución, aplicando desarrollos deductivos para su demostración y, por último, analizando si la solución obtenida es única y, si no lo fuese, si es la "mejor" posible para, nuevamente, empezar como decía Carlitos a Snoopy: *¡qué pena!, una vez que me supe todas las respuestas me cambiaron todas las preguntas*. Creo firmemente que es este nuestro papel social porque de este modo quien aprende gana en autonomía intelectual que es lo verdaderamente importante.
- b) Desde la Universidad, consiguiendo la mejor formación posible de profesionales altamente cualificados que, una vez egresados, aporten sus conocimientos al mundo de la Cultura, la política, la empresa, la industria, la enseñanza o la investigación.

Es evidente que lo anterior hay que hacerlo dentro de determinados contextos. El primero, el marco educativo que cada país ha definido mediante sus leyes y desarrollos de las mismas, con sus etapas y ciclos, sus currículos y secuenciaciones, reflejo del modelo de sociedad en la que vivimos. El segundo, que es el que aquí me preocupa, es el contexto que rodea a quien ha de aprender. En una sociedad avanzada, social y tecnológicamente, multicultural y solidaria, como debiera ser la nuestra, el aprendizaje escolar de las Matemáticas es más necesario que nunca por lo que es conveniente abrir cauces a proyectos educativos que propicien el mejor de los aprendizajes posibles en esta disciplina, lo cual conduce a la incorporación de metodologías y didácticas actuales.

Una propuesta para enseñar Matemáticas

El planteamiento de cualquier actividad para el aula de Matemáticas no debe olvidar el significado que tiene la palabra *Matemáticas*.

Como tantas otras palabras, también esta fue acuñada en Grecia con el nombre μαθημα, en transcripción latina *mathema*, que quiere expresar *conocimiento*. De género femenino, es una ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y de sus relaciones. También se utiliza en plural con el mismo significado que en singular. La palabra *Matemático*, *ca* se deriva de la griega μαθηματικός. Utilizada como adjetivo tiene el significado de *exacto*, *preciso*. También es utilizada para referirse a una *cosa perteneciente o relativa a las Matemáticas*. Como sustantivo, masculino o femenino, se usa para nombrar a la *persona que profesa las Matemáticas o tiene en ellas especiales conocimientos*.

Esta concepción de las Matemáticas llegó hasta Galileo (1564-1642): "*ciencia necesaria para conocer el mundo*". Y Descartes (1596-1650) decía que: "*Es la ciencia del orden y la medida*".

Albert Einstein planteó la siguiente paradoja: *¿Cómo es posible que las Matemáticas, un producto del pensamiento humano, que es independiente de la experiencia, se ajusta tan excelentemente a los objetos de la realidad física? ¿Puede la razón humana sin experiencia pensar propiedades de las cosas reales?* Pues, a lo que se ve sí. El carácter abstracto de los objetos matemáticos y la teoría que se construye con ellos deductivamente la hacen análoga a un juego, un gran juego.

La modelización matemática es la clave de ese juego. Según Sixto Ríos (1995, Modelización, p. 17, Alianza Editorial), es "*un proceso mental que conduce a convertir un problema opaco de la realidad en un problema clarificado matemático, de modo que resolviendo éste se consiga una solución o, al menos, un buen conocimiento del primero*".

Cualquier clase, o conjunto de ellas, debe seguir un proceso, sin "picos", que nos lleve desde el problema hasta el modelo matemático que permite su resolución. Las actividades han de estar programadas de modo que se vayan alcanzando los conocimientos deseados de forma equilibrada y armoniosa:

1º. Una vez que se ha puesto de manifiesto la necesidad de realizar una investigación, se pasa a proponer actividades deductivas que podemos llamar de "nivel 1" por realizarse sobre un caso particular.

Los materiales manipulativos pueden servir para provocar conjeturas y crear imágenes mentales sin las cuales es imposible el aprendizaje. En esta fase, las Matemáticas "entrarán por los dedos y la vista" para instalarse en el cerebro.

2º. Hay actividades deductivas que llamaré de "nivel 2" por tratar un caso general.

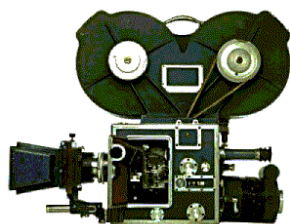
3º. ¿Cuál es la utilidad social de lo que estamos hablando?

4º. Una técnica creativa utilizada por los artistas consiste en hacer variaciones sobre un mismo tema. Didácticamente hablando, conviene sacar el máximo provecho a una misma actividad. Planteamos una actividad de "nivel 3"; una generalización.

5º. Una vez resuelto el caso general, se puede aplicar de nuevo el resultado obtenido para casos particulares en una actividad deductiva de "nivel 2". O actividades de consolidación del aprendizaje de la mano de los materiales mediante la propuesta de juegos.

Cada vez son más los profesores y profesoras de Matemáticas que están apostando por una metodología que gire alrededor de la **construcción del conocimiento matemático** y, entre otras herramientas didácticas, han introducido en sus clases materiales manipulativos en los que se apoyan para que sus alumnos y alumnas construyan "sus" Matemáticas. Así mismo, han adoptado un modelo de gestión del aula que es radicalmente diferente del habitual y que podemos resumir con el eslogan: **menos es más**. ¿A qué me

refiero?, pues a que el profesor o profesora tiene que *hablar menos* y proponer las actividades convenientes para que el alumnado *trabaje más*. Antes que nada, quiero decir que nuestras propuestas para la clase de Matemáticas deben adaptarse a lo que el gran director de cine Billy Wilder sostenía para lograr una buena película:



Los ocho primeros mandamientos son:

no aburrirás al prójimo.

El noveno: no sermonearás.

Y el décimo: nunca harás una película en la que tengas un porcentaje de los beneficios, porque nunca ganarás un duro.

Si se recuerdan estos diez mandamientos es imposible equivocarse.

Billy Wilder

Por tanto, **queda prohibido aburrir**, pero ¿cómo conseguirlo?

Enunciaré 5 axiomas para una clase de Matemáticas que el alumnado, en general, creo que aceptará.

En cada uno, esbozaré alguna actividad (o conjunto de ellas) sin más pretensión que la de servirles para explicitar su significado.

I. Proponer actividades que permitan el aprendizaje de las Matemáticas desde su uso por la sociedad.

De este modo tendrán credibilidad las actividades propuestas en clase y no serán sólo “un filtro de selección social”. Así, pues, tendrán cabida clases para explicar la forma de determinados objetos (puntas de bolígrafos o rotuladores, tapaderas, cajas y envases, en general, etc.), cómo analizar datos (publicados en periódicos, por ejemplo), en qué se basan las firmas digitales (como, por ejemplo, la que suministra la FNMT para todos los españoles) o determinados códigos (dígitos de control de cuentas

bancarias, códigos de barras, etc.), cómo realizar simulaciones y predecir resultados a partir de una muestra, estudiar el mundo de los juegos de azar, etc.

II. Buscar la complicidad del alumnado para realizar juntos, de la mano, la apasionante aventura de su aprendizaje.

Miguel de Guzmán, a quien tanto vamos a echar de menos, sostiene en *Cuentos con cuentas* (Lábor, 1984) que el juego y la belleza están en el origen de una gran parte de las Matemáticas. Provocan diversión y satisfacción en muchas personas, no sólo entre quienes nos dedicamos a ellas profesionalmente. Las Matemáticas se convierten así en un reto, un desafío en el que sólo ha de pensarse bien. Es evidente la enorme importancia que tiene el que los miembros de cualquier sociedad libre (y es importante este calificativo) piensen bien. También lo es que el aprendizaje de las Matemáticas contribuya, especialmente, a ello. Sin embargo, aunque es frecuente oír la defensa desde esta óptica de la necesidad de explicar ciertos contenidos curriculares, los resultados obtenidos a lo largo de años y años indican, claramente, que tal objetivo no sólo no se alcanza sino que ni siquiera se llegan a leves aproximaciones del mismo.

III. Es necesario seducir. Las Matemáticas son una excelente musa para conseguirlo "explicando" la belleza del mundo que nos rodea.

En particular, la Geometría puede ser un buen acercamiento para seducir. Desde hace demasiado tiempo venimos hablando sobre la necesidad de introducir la Geometría sintética, primero, en la formación del profesorado (y son muchos los cursos impartidos con esta finalidad) y, segundo, en la clase. Desgraciadamente los hechos nos demuestran que aún no lo hemos conseguido. Se sigue abusando de métodos como el trigonométrico o el de las coordenadas como únicos recursos para resolver problemas geométricos. La geometría tridimensional suele estar ausente en el aprendizaje del alumnado. El desarrollo de la visión espacial, tan necesaria porque, entre otras razones, no vivimos en Planilandia, está prácticamente

ausente en la enseñanza. Por otro lado, es tan apasionante el análisis geométrico de nuestro mundo que me resulta inconcebible que no se haga. Además, es tan fácil que no hay más que mirar a nuestro alrededor para poder "viajar" hasta donde se desee sin dificultad. Eso sí, hay que saber colocarse esas "gafas" con las que "ver" los diferentes modelos geométricos que están al alcance de nuestra mano.

Formas planas y tridimensionales, medidas de sus longitudes, ángulos, áreas y volúmenes (no necesariamente mediante el uso de fórmulas), análisis de sus propiedades (proporción, simetría, isoperímetros, anchura constante, etc.) y resolución de problemas aplicando heurísticos, procedimientos y métodos (trigonométricos, de transformaciones, de lugares geométricos y de coordenadas), permiten explicar el mundo en el que vivimos: la Tierra y el Universo, a nivel microscópico –cristales, modelos atómicos, etc.- y macroscópico –geometrías, en general, astronomía, geodésicas, la hora, mapas y atlas, etc.- , o a escala humana –proporción y simetría de seres animales y vegetales, etc.- o las formas construidas por las personas que han permitido el desarrollo de las diferentes culturas -polígonos y poliedros, curvas y superficies, etc.-.

IV. Hay que sorprender. Sin la atención de la clase nada puede hacerse.

La medida rigurosa de la incertidumbre es el otro frente abandonado en la mayoría de las clases de Matemáticas. La construcción del concepto de probabilidad se reduce a la aplicación de la ley de Laplace: número de casos favorables entre el de posibles. ¿Por qué no experimentar?

V. Hacer que "en clase sea normal lo que en la calle es normal".

Aún hay un elevado número de profesores y profesoras de Matemáticas que se resisten al uso de la calculadora y el ordenador en clase. El argumento siempre es el mismo: "de este modo (es decir, usando la calculadora o el ordenador) no sabrán ni sumar". De este modo, las clases de Matemáticas no tienen credibilidad. Nadie rehusa una calculadora u ordenador en la vida

corriente. Es más, cualquier profesional o empresa viene apostando, claramente, como señal de competitividad por las TIC. No usarlas supone, además de volver a las cavernas didácticamente hablando, la pérdida de una herramienta fantástica de experimentación en clase y no sólo de cálculo potente.

Todo lo dicho sólo pretende provocar la reflexión acerca de los estilos más frecuentes que podemos observar en la actuación del profesorado de Matemáticas, en general, y que creo es necesario adaptarla a las exigencias de nuestra sociedad; a una sociedad en la que hay formas de vida nuevas, nuevos conocimientos y herramientas tecnológicas, nuevos órdenes sociales, la multiculturalidad es un hecho imparable y la sostenibilidad del entorno una exigencia inaplazable.

Epílogo

La Educación Matemática no es sino una pieza más para la formación de personas que han de incorporarse con posterioridad al conjunto de la ciudadanía, con todo lo que esto conlleva; pero es una pieza muy importante, por lo que merece la pena la realización de un gran esfuerzo por parte de todos, profesorado y administraciones educativas, en la puesta al día de quienes se encargan de enseñar Matemáticas, incidiendo tanto en la formación inicial del profesorado como en la permanente; es decir, en las facultades de Ciencias de la Educación y en las de Matemáticas y en los Centros del Profesorado y demás instituciones encargadas de la formación permanente del profesorado, incluyendo todas las Sociedades y Colectivos que aglutinan al Profesorado de Matemáticas con el único deseo de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.