SIERPINSKA, A. y LERMAN, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En: A. J. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht, HL: Kluwer, A. P. [Traducción de Juan D. Godino]

RESUMEN

Este capítulo afronta cuestiones relativas a la epistemología en cuanto están relacionados con las matemáticas y la educación. Comienza con un examen de algunas de las principales cuestiones epistemológicas relativas a la verdad, el significado y la certidumbre, y los modos diferentes en que pueden ser interpretados. Examina epistemologías del 'contexto de justificación' y del 'contexto de descubrimiento', epistemologías fundacionalista y no fundacionalistas de las matemáticas, histórico-críticas, genéticas, socio históricas y culturales, así como epistemologías del significado.

En la segunda parte del capítulo, después de una breve mirada a la epistemología con relación a los enunciados de la educación matemática, las epistemologías en la educación matemática se convierten en el principal foco de atención. Se tratan cuestiones controvertidas en un cierto número de áreas: el carácter subjetivo-objetivo del conocimiento matemático; el papel sobre la cognición del contexto social y cultural; las relaciones entre el lenguaje y el conocimiento. Se comparan los principales principios del constructivismo, visiones socio-culturales, interaccionismo, la didactique francesa, y las epistemologías del significado. También se consideran las relaciones entre la epistemología y una teoría de la instrucción, especialmente respecto a los principios didácticos.

EPISTEMOLOGÍA DE LAS MATEMÁTICAS Y DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Nuestra intención en este capítulo es clarificar lo que significa 'epistemología' en los distintos entornos en los que se usa dentro de la comunidad internacional de educación matemática, elaborar críticamente los orígenes, significados y usos de las esas nociones de epistemología, y reflexionar sobre nuestras prácticas como investigadores y educadores en relación a las teorías epistemológicas sobre las que nos apoyamos. No intentaremos ser exhaustivos en nuestro estudio de las epistemologías de las matemáticas y de la educación matemática, ni en un sentido histórico ni en nuestro examen de las teorías actuales.

El capítulo se ha escrito primariamente para los educadores matemáticos -no para los filósofos de las matemáticas- y limitaremos nuestro estudio a aquellas áreas que consideramos relevantes para nuestra audiencia (y nosotros mismos). Aunque nuestra revisión de la investigación realizada en educación matemática con relación a la epistemología no será exhaustiva, no obstante, se abordan las principales cuestiones epistemológicas.

El capítulo comienza con una visión global de las cuestiones básicas de la epistemología y de las muy diversas formas en que se pueden interpretar. De hecho, la primera parte del capítulo (‘Epistemologías de las Matemáticas’) intenta ‘clasificar’ las epistemologías.En particular, mencionamos discusiones históricas relacionadas con la distinción entre epistemología por una parte, y psicología, sociología e historia de la ciencia, por otra. Esto nos lleva a hablar sobre epistemologías del ‘contexto de justificación’ y epistemologías del ‘contexto de descubrimiento’. Se hace referencia a epistemologías de las matemáticas fundacionalistas y no fundacionalistas, así como a epistemologías histórico-críticas, genéticas, socio-históricas y culturales, y a epistemologías del significado.

En la segunda parte del capítulo (‘Epistemologías de la Educación Matemática’) realizamos un examen del uso y papel de las epistemologías en la educación matemática. Argumentamos que las aproximaciones constructivista, socio-cultural, interaccionista y antropológica están fundadas sobre diferentes epistemologías del conocimiento. También discutimos aproximaciones que se centran en análisis epistemológicos del significado de conceptos matemáticos particulares. Finalizamos con una reflexión sobre las relaciones entre epistemología y teorías de la instrucción que necesariamente incorporan sistemas de valores o principios. Esta discusión incluirá las cuestiones de complementariedad y eclecticismo.

1. EPISTEMOLOGÍAS DE LAS MATEMATICAS

En este apartado nos ocupamos de clarificar la noción de epistemología, sus diversos significados, las cuestiones consideradas como epistemológicas y las que no, y las diferentes interpretaciones de estas cuestiones.

1.1. Clasificación de las cuestiones epistemológicas

La epistemología, como una rama de la filosofía interesada por el conocimiento científico, plantea cuestiones fundamentales tales como: ¿Cuáles son los orígenes del conocimiento científico? (¿Empírico? ¿Racional?); ¿Cuáles son los criterios de validez del conocimiento científico? (¿Capacidad de predecir sucesos? ¿Consistencia lógica?); ¿Cuál es el carácter del proceso de desarrollo del conocimiento científico? (¿Acumulación y continuidad? ¿Períodos de ciencia normal, revoluciones científicas y discontinuidad? ¿Desplazamiento y refinamiento de programas científicos?

Estas cuestiones se puede interpretar de diversos modos. Se pueden preguntar en términos generales, como antes, o se pueden hacer más específicos con respecto a algún dominio particular de conocimiento científico, por ejemplo, las matemáticas. Uno puede estar interesado en el conocimiento desde varias perspectivas. Se puede preguntar: ¿cuáles son los orígenes de la validez de nuestras creencias? O bien, ¿cuáles son las fuentes del significado del conocimiento, y cómo se constituye el significado? Estas son cuestiones diferentes porque el significado y la verdad son categorías diferentes. También se puede preguntar: ¿cuál es la ontogénesis del conocimiento? y hablar del desarrollo de 'estructuras cognitivas', por ejemplo. O la cuestión se puede plantear sobre la 'filogénesis' de los sistemas discursivos de conocimiento tales como las matemáticas o alguna de sus partes.

Algunos prefieren enfocar las cuestiones epistemológicas de una manera filosófica, y otros de una manera más científica. Los primeros se preguntan: ¿Cómo se puede explicar racionalmente un resultado científico sobre la base de lo que se obtiene de él? Los últimos se preguntan: ¿Cómo se obtuvo de hecho un resultado científico dado?

Estas cuestiones discriminan entre las actitudes hacia la epistemología de los interesados por los fundamentos de las matemáticas y los educadores matemáticos. Los educadores matemáticos están por lo general menos interesados en estudiar los fundamentos de la validez de las teorías matemáticas que en explicar los procesos de crecimiento del conocimiento matemático: sus mecanismos, las condiciones y contextos de los descubrimientos pasados, las causas de los períodos de estancamiento y las afirmaciones de que, desde el punto de vista de la teoría actual, aparentan, o han sido erróneos.

Los educadores matemáticos están generalmente menos interesados en estudiar los fundamentos de la validez de las teorías matemáticas que en explicar los procesos de crecimiento del conocimiento matemático: sus mecanismos, las condiciones y contextos de descubrimientos pasados, las causas de los períodos de estancamiento y las afirmaciones que, desde el punto de vista de la teoría actual, parecen ser, o haber sido, erróneas.

Los educadores matemáticos están también interesados en observar y explicar los procesos de descubrimiento matemático realizados tanto por los expertos matemáticos como por los estudiantes. Finalmente, como prácticos, investigan modos de provocar tales procesos en la enseñanza. Si las cuestiones sobre la certeza ocupan a los educadores matemáticos es a menudo en el contexto de discusiones sobre el concepto de error, sus diferentes categorías y las posibles actuaciones del profesor como reacción a los errores de los estudiantes, las concepciones que se apartan de las aceptadas o esperadas. Sin embargo, como mostraremos, ha habido un cierto número de estudios sobre la significación de las cuestiones filosóficas para la educación matemática.

No todos los educadores matemáticos comparten la misma epistemología, incluso aunque se interesen con cuestiones epistemológicas similares. Veremos en la segunda parte de este capítulo que las líneas de división se refieren a cuestiones tales como el carácter subjetivo-objetivo del conocimiento, el papel en la cognición de los contextos sociales y culturales, y las relaciones entre lenguaje y conocimiento.

1.2. Epistemología del contexto de justificación y fundacionalismo en la filosofía de las matemáticas

Las anteriores preocupaciones de los educadores matemáticos hubieran sido consideradas por los filósofos de la ciencia de la primera mitad del siglo, como no pertenecientes a la epistemología propiamente sino a la psicología, historia, sociología o semiótica. Por ejemplo, Carnap (1928/1966) y Reichenbach (1938/1947) propusieron que la epistemología se ocupa en sí misma con una 'reconstrucción racional' de los procesos de pensamiento científico, esto es con la descripción de cómo los procesos científicos se desarrollarían si 'factores irracionales' no interfirieran. Las 'reconstrucciones racionales' quiere decir descripciones de los procesos de pensamiento de los científicos, no cuando están descubriendo algo, sino cuando están intentando comunicar y justificar sus descubrimientos. Esto es, presentaciones del 'contexto de justificación' del pensamiento científico. El 'contexto de descubrimiento' o los procesos de hechos del descubrimiento científico y del impacto sobre ellos de los factores cognitivos, sociales e histórico-culturales pertenecen, según estos autores, no a la epistemología sino a los dominios empíricos de la psicología, sociología e historia del conocimiento.

Karl Popper (1972) comprendió la epistemología de un modo 'anti-psicologista', Inre Lakatos, un discípulo y crítico de Popper, extendió el domino de las reconstrucciones epistemológicas a aquellas partes del proceso de descubrimiento que presentía podrían ser racionalizadas. Sus *Pruebas y Refutaciones* (1976) proporcionaron una reconstrucción racional del proceso de descubrimiento y justificación de una cierta parte de la topología. Pero la epistemología de Lakatos sigue siendo programáticamente anti-psicologista. Su noción, por ejemplo, de 'concepto generado por la prueba' es una herramienta metodológica en las reconstrucciones racionales, no una generalización de hechos históricos o psicológicos.

Una aproximación a la epistemología centrada en el 'contexto de justificación' se conoce como 'fundacionalismo'. La aproximación fundacionalista a las cuestiones del crecimiento de las matemáticas es a-histórica y a-social: 'la historia de las matemáticas está jalonada de sucesos en los que los individuos son iluminados por los nuevos insights que no guardan una relación particular con los antecedentes de la disciplina' (Kitcher, 1988).

Las respuestas a cuestiones de los orígenes del conocimiento se han clasificado tradicionalmente en dos categorías: apriorismo y empirismo. Las filosofías fundacionalistas de las matemáticas cuya principal preocupación consiste en encontrar algún tipo de ‘primera matemática, una disciplina especial a partir de la cual todo el resto se debe construir’ (Kitcher, 1988), p. 294) son necesariamente apriorísticas. De otro modo, afirma Kitcher, no habría contenido en sus preocupaciones. Naturalmente, el apriorismo aparece como una solución aceptable, si el empirismo, especialmente el empirismo ingenuo, se ve como la única alternativa epistemológica. El empirismo es simplemente inaceptable como una epistemología de las matemáticas. Richard (1907) proporcionó un argumento contra el empirismo desde un punto de vista fundacionalista: ‘si la experiencia sola puede probar la verdad de los axiomas, ¿cómo podemos conocer que son verdaderos en cualquier sitio?

Puede haber otros argumentos a favor del apriorismo, dados desde perpectivas diferentes. Por ejemplo, desde una perspectiva de ontogénesis del conocimiento, en el que el apriorismo se identifica con el innatismo, existe un conocido argumento de C. G. Hempel, citado por Jerry Fodor (in M. Piatelli-Palmarini, 1979, p. 380). El argumento es el siguiente: (0, -1), (1, 0) y (2, 1). Hay infinitas posibilidades de generalización (por ejemplo,

$y = x-1$; $y = (x-1)^3$; $y = (x-1)^{2n} \cos 1 (1-x/2)$ para $n = (1, 2, ...)$

Si el conocimiento fuera un resultado de las experiencias individuales, en principio, todas estas generalizaciones serían equivalentes. Pero hay un orden de preferencia en la elección de la función modelo, que hace de $y = x-1$ la elección obvia. Fodor comentó: ‘Se puede llamar a esto simplicidad, o el orden a priori de las funciones, o innatismo’.

1.2.1. Epistemología del contexto de descubrimiento: Poincaré y la tradición francesa en epistemología
.

La filosofía de la ciencia francesa se considera tradicionalmente como psicologista e historicista (ver, por ejemplo, Largeault, 1994). Se intenta realizar presentaciones de procesos de hecho mas bien que sus reconstrucciones racionales. En el campo de la epistemología de las matemáticas, los trabajos de Bruschwicg (espcialmente *Les Etapes de la Philosophie Mathématique,* publicada en 1912) y los escritos filosóficos de Poincaré –publicados en artículos en L’Enseignement Mathématique (ver, por ejemplo, Poincaré, 1899, 1908a) y después en sus bien conocidos libros tales como Science et l’Hhpothése (1906), y Science et Méthode (1908b) han tenido una influencia importante. Cavaillès, Bachelard y Piaget fueron alumnos de Bruschwicg.

El psicologismo de las epistemologías de Poincaré, Bachelar y Piaget es evidente. La Formación del Espíritu Científico de Bachelard (1938) fue una búsqueda de las 'condiciones psicológicas del progreso de la ciencia'. Poincaré comenzó un artículo diciendo que el problema de la génesis de la invención matemática inspiraría el mayor interés de un psicólogo. Según Poincaré, el 'contexto de descubrimiento', o más bien, 'invención' (Poincaré no fue un Platónico), era algo valioso de estudiar porque reflexionando sobre este proceso se pueden encontrar razones de los errores en matemáticas.

Aunque psicologista, la epistemología de Poincaré se preocupó, no obstante, con los orígenes de la validez de nuestras creencias y no con psicogénesis o historia del conocimiento científico. Poincaré encontró estos orígenes en la intuición sintético a priori del matemático y en su 'experiencia' o construcción efectiva que le permite verificar si un objeto postulado existe. Pero la intuición es falible; una iluminación repentina que ha adulado el sentido estético del matemático puede resultar falsa cuando se somete al test del examen lógico (1908a). Así pues, en la construcción de las leyes matemáticas, la intuición y la lógica interactúan; una en el proceso de invención, la otra e su verificación.

Hay, inesperadamente, muchas características comunes entre las reflexiones epistemológicas de Poincaré y las de Dieudonné (1992), a pesar del vínculo de Dieudonné con Bourbaki y logicismo declarado.

1.2.2. Psicologismo en la epistemología estructuralista de Dieudonné

Dieudonné defendió una epistemología 'estructuralista' de las matemáticas, en el sentido de que consideró las matemáticas una 'interacción y comparación de patrones'. La ontología de los objetos matemáticos (si existen, y si existen independientemente de la mente humana) no es importante: 'Para un estructuralist, lo que es importante no es la metafísica de, por ejemplo, los Dominios de Factorización Única, y los Dominios de Ideales Primos, sino el hecho de que cada estructura del primer tipo es, a fortiori, una estructura del segundo tipo' (p. 52).

La estructura es el foco de la visión estructuralista de las matemáticas, la naturaleza de los elementos en cualquier situación dada rápidamente se desvanece en el trasfondo, y se realizan amplias generalizaciones. Las transformaciones de figuras particulares del plano se sustituyen por transformaciones del plano consideradas como una estructura de una clase particular; la noción general de grupo reemplaza a los diversos grupos particulares de las transformaciones geométricas; la noción de aplicación suplanta a la actividad de cambio de variables, etc.

Para Dieudonné (1992), el método de validación de los enunciados matemáticos es ciertamente la prueba deductiva. En este sentido, la base para la aceptación de un enunciado es la aceptación de los axiomas. Sin embargo, Dieudonné no dice que no hay ningún conocimiento matemático antes de la axiomatización. Los axiomas no son, genéticamente, primeros. Pueden desempeñar diversos papeles en la evolución de las matemáticas. Ayudan a reorganizar el conocimiento matemático, y juegan una parte importante en la comprensión y el desarrollo de las intuiciones.

Como Poincaré,Dieudonné (1992) no se interesó por el contexto de justificación. De hecho, afirmó que la cuestión de la validez del conocimiento matemático es simple: un enunciado verdadero es un enunciado probado, aunque las pruebas rigurosas son sólo posibles en teorías axiomatizadas. Todos los teoremas matemáticos son verdaderos. Por tanto la evaluación de los resultados matemáticos no se puede basar en su verdad. Se deben usar otros criterios, tales como no trivialidad, generalidad, profundidad. Pero lo que estos términos evaluativos significa cambia de una época a otra y depende de modas y caprichos. Por tanto, los criterios para la evaluación de un trabajo matemático son, según Dieudonné (1992), 'inevitablemente subjetivos, un hecho que lleva a algunas personas a decir que la matemática es más un arte que una ciencia'' (p. 28)

Dieudonné (1992) resaltó que la prueba que a veces se considera como constitutiva del nacimiento de las matemáticas (la inconmensurabilidad del lado de un cuadrado y su diagonal) es de hecho una prueba de imposibilidad (p. 34). Esto nos lleva a reflexionar sobre la especificidad de los enunciados y preocupaciones matemáticas. Las pruebas de imposibilidad son la marca de una manera de pensar en matemáticas. Las ciencias se interesan por explicar fenómenos, no en probar que algún fenómeno es imposible. Existen otras cuestiones que se pueden considerar como típicas de las matemáticas; por ejemplo, describir todos los objetos posibles que satisfacen una cierta condición, tal como: todos los poliedros regulares;todas las formas posibles de un cristal; todos los grupos simples, esto es todos los casos, no sólo los casos típicos, o prototipos. Al resolver un problema matemático se ve como importante tener en cuenta todos los casos posibles, no sólo los que son más probables de que aparecezcan en las aplicaciones. Esta orientación hacia 'tener un imagen completa'puede explicar ciertas definiciones generales como la de independencia linear de un conjunto de vectores que incluye el caso del conjunto compuesto de un único vector. Los educadores matemáticos a veces piensan que tales definiciones son impertinentes y formalistas. Pero hay que reconocer que las matemáticas han crecido de esa manera, llevadas por la preocupación primordial de presentar la imagen completa, la estructura completa descrita con todo detalle.

Dieudonné mencionó otra preocupación típicamente matemática, consistente en disponer de un conjunto de modos diferentes de hablar de un concepto dado: traslaciones de un entorno a otro; geométrico a algebraico y viceversa. Es suficiente evocar la historia del álgebra lineal, que ha crecido mediante el desarrollo de, y una interacción dialéctica entre la geometría sintética, analítica y de lenguajes estructurales (Sierpinska, Defence, Khatcherian y Saldanha, en prensa)

Como estructuralista, Dieudonné (1992) consideró la matemática como un todo unificado, en el que el significado y la significación de cada parte es una función del papel que juega en este todo. Desde esta perspectiva, el trabajo de síntesis, la recopilación y organización de los resultados con el propósito de su comunicación es muy importante. Dieudonné, uno de los fundadores del grupo Bourbaki, llegó a afirmar que es en estos trabajos de exposición donde se encuentra la base de una presentación de la evolución de la matemática, ya que la evolución en matemáticas consiste en generalización, reformulación en un nuevo o diferente lenguaje, reorganización, axiomatización. Siempre, desde Euclides, dice Dieudonné (1992), los trabajos expositorios han consolidado las transformaciones en la concepción de las matemáticas, y consolidado los nuevos modos de pensamiento (p. 162).

Dieudonne (1992) no ve evolución en matemáticas de un modo dramático, como podría inferirse de la teoría de las revoluciones de Kuhn, o las reconstrucciones Lakatosinas de la historia de las matemáticas. No hay una cuestión sobre discontinuidad en la historia de las matemáticas. Dieudonné no es el único que sostiene este punto de vista. Muchos matemáticos ven el desarrollo de las matemáticas como ocurriendo de una manera más o menos continua. Tiene muy buenas razones para esto (Sfard, 1994). Los cambios se producen en la meta-matemática y los modos de pensamiento, no en el componente técnico de las matemáticas. Los matemáticos tienden a enfatizar el componente técnico: en eso no hay revoluciones, por tanto no hay revoluciones.

Los educadores matemáticos, por el contrario, están más inclinados a ver la historia de las matemáticas de una manera más dramática porque están y deben estar más preocupados por el componente meta-matemático. Es ahí donde los aprendizes tienen problemas. Los matemáticos, en su práctica diaria, no se preocupan por las cuestiones meta-matemáticas. Continúan con sus investigaciones esperando que ‘la fe les vendrá’. Pueden no estar de acuerdo con ciertas sutilizas de tipo filosófico, pero al menos desean y a veces son capaces de cambiar sus modos de aproximarse a los problemas. Pueden ser intuicionistas o constructivistas al nivel meta-matemático, pero esto no les impiden comprender las matemáticas escritas por las personas con otros puntos de vista. Esto puede ser diferente para los estudiantes para quienes el nivel técnico de las matemáticas puede estar completamente interconectado con cuestiones de naturaleza filosófica (Sierpinska, 1990).

1.2.3. Las aproximaciones genética e histórico-crítica a la epistemología en los trabajos de Piaget

La restricción de la epistemología al contexto de justificación y a las reconstrucciones racionales de los procesos de investigación científica ha sido contestada por algunos filósofos, quienes han postulado la necesidad de realizar serios análisis filosóficos de los procesos de descubrimiento y los métodos de control y validación usados efectivamente por los científicos reales. (Kuhn, 1962; Feyerabend, 1978)

Mientras que Kuhn y Feyerabend se apoyaron en sus análisis en datos históricos y consideraciones sociológicas, Piaget fue el primero en coordinar la 'lógica del descubrimiento científico' con los datos psicológicos de una manera sistemática y metodológicamente clara. Para Piaget, los objetos de la epistemología son los mecanismos implicados en los procesos de la constitución del conocimiento en el marco de disciplinas científicas particulares (no los orígenes de la validez de las creencias o los métodos de justificación de las afirmaciones científicas). En la identificación y estudio de estos mecanismos se pueden usar dos métodos complementarios: uno de ellos mirándolos desde una perspectiva sincrónica, el otro desde una perspectiva diacrónica. En las perspectiva sincrónica, se usa un análisis lógico-matemático para definir la 'significación epistemológica' de una herramienta conceptual dada: cómo 'funciona de hecho dentro de un sistema sincrónico de interacciones cognitivas' (Piaget y García, 1989, p. 1). En la perspectiva diacrónica, se construye una génesis histórica y psicogenética de un área de pensamiento científico. Ambas perspectivas son necesarias para avanzar y explicar la 'significación epistemológica' de un ítem de conocimiento, ya que, según Piaget, el conocimiento no es independiente del proceso de su formación, y, por tanto, 'las construcciones más avanzadas conservan vínculos parciales con sus formas más primitivas' (Piaget y Garcia, 1989, p. 3).

Piaget enfatizó las características comunes de la psicogénesis e historia de la ciencia. Para él, ambos desarrollos eran 'secuenciales', en el sentido de que no eran aleatorios y se pueden distinguir estadios en el avance del desarrollo. Cada siguiente estadio es al mismo tiempo 'un resultado de las posibilidades abiertas por el previo y una condición necesaria para el siguiente. Además, cada estadio comienza con una reorganización, a otro nivel, de las principales adquisiciones que ocurrieron en los estadios precedentes' (Piaget y Garcia, 1989), p. 2). Esta secuencialidad justifica, según Piaget, la afirmación de que las construcciones más primitivas están 'integradas' en las más avanzadas. Sin embargo, esta integración se refiere no tanto al contenido del conocimiento, ni a su estructura, como a los instrumentos y mecanismos de su constitución. 'Los factores verdaderamente universales en cualquier tipo de desarrollo cognitivo ... son funcionales en clase más que estructurales' (Piaget y Garcia, 1989, p. 25).

Se debe observar, sin embargo, que lo que permitió a Piaget afirmar este 'paralelismo' específico del desarrollo psicológico y la historia de la ciencia, es una aproximación al estudio de esos procesos que, aunque sin caer en evidente 'logicismo', está libre de referencias y consideraciones 'de hecho' ('factual'). Habló de la psicogénesis y la génesis histórica del conocimiento y no de procesos de hecho. Planteó la cuestión de la constitución del conocimiento en términos de normas cognitivas en diferentes estadios o niveles de desarrollo. Ignoró los aspectos de hecho del desarrollo individual tales como la conducta sobre un nivel psicofisiológico (mecanismos materiales de acción, estados de conciencia, memoria, imágenes mentales, etc.) Dejó de lado hechos históricos tales como quién probó qué en un momento dado.

> La historia de un concepto da alguna indicación sobre su significación epistémica sólo en la medida en que la cuestión de esta relación se plantee en términos de 'tendencias' –esto es, en términos de la evolución de normas a una escala que hace posible discriminar estadios mas bien que en términos factuales de cómo un autor influye en otro; o, particularmente, en términos de la controversia de si un problema de algún modo no interesante sobre el papel de los precursores en la creación de un nuevo sistema ... Este es un problema psicológico mucho más que epistemológico. (Piaget y García, 1989, p. 5)

De este modo, Piaget no estaba simplemente introduciendo la psicología y la historia de la ciencia en la epistemología. Permitiéndose a sí mismo utilizar resultados de experimentos para resolver ciertas cuestiones de epistemología (por ejemplo, si la noción de sólido es un dato empírico) o para justificar ciertas elecciones en la construcción de su teoría, se comprometió en justificar los enunciados de su teoría sobre la base de supuestos y otros enunciados admitidos. Lo que le permitió decir que había evitado el logicismo en su teoría fue el hecho de que estudió 'las normas cognitivas del sujeto y no las del lógico' (Piaget y Garcia, 1989, p. 5).

1.3. Visiones sociológicas de las matemáticas

1.3.1. Naturalismo

El constructivismo es una alternativa al apriorismo genético por una parte, y al empiricismo por otra. El constructivismo se centra sobre el desarrollo cognitivo o conceptual, interno de la mente o de la disciplina como un todo. Otras epistemologías orientan su atención a aspectos del crecimiento del conocimiento más externos, y sociales. Algunas de estas epistemologías proponen una visión de las matemáticas que subrayan su semejanza con las ciencias naturales. Kitcher (1988) llama a su epistemología 'naturalista'. Lakatos habla de filosofía de las matemáticas 'cuasi-empiricista'

Un conjunto de argumentos interesantes sobre los aspectos experimentales de las matemáticas se pueden encontrar en Dreyfus (1993).

El naturalismo de Kitcher tiene como uno de sus fines escaparse de las fiolosofías fundacionalistas (Kitcher, 1988, 294). El naturalismo no encuentra ninguna necesidad de regresar a los axiomas en la búsqueda de los orígenes del conocimiento matemático. De hecho, desde el punto de vista naturalista, los axiomas de una teoría no son sus comienzos. Mas bien son el resultado de una sistematización de un 'cuerpo previo de afirmaciones' sobre los objetos de la teoría 'que han sido empleados tácita o explícitamente en el razonamiento'. El trabajo de axiomatización muestra que esas afirmaciones 'pueden ser derivadas de [ciertos] principios ... seleccionados como básicos'. Kitcher afirmó que cuando Cauchy basó el análisis matemático sobre el concepto de límite, no fue porque de repente fue iluminado por algún de tipo de intuición platónica o porque esta noción actuó sobre su intuición como una construcción necesaria: mas bien fue porque la encontró especialmente útil en su compromiso de estructurar el vasto dominio de conocimiento llamado Cálculo.

Kitcher (1988) enfatizó que el modo en que se justifican los axiomas 'es exactamente análogo' al modo en que un científico explicaría la introducción de una 'nueva colección de principios teóricos sobre las bases de que ellos pueden explicar los resultados logrados por los trabajadores previos del campo' (p. 295). Encontramos aquí una semejanza con la idea de Lakatos de las matemáticas como 'ciencia cuasi-empírica'

(Lakatos, 1978).

El naturalismo aporta una dimensión histórica a las cuestiones de la génesis y justificación del conocimiento y la hace inseparable de la cuestión del crecimiento del conocimiento. El conocimiento matemático es un producto histórico.

Kitcher (1988) adoptó la siguiente línea de argumentación en su presentación naturalista del conocimiento matemático. Los orígenes del conocimiento matemático están la 'práctica primitiva, empíricamente basada', y 'las experiencias perceptibles en situaciones en que [las personas] manipulan sus entornos (por ejemplo, desplazando pequeños grupos de objetos)'. Lo que cuenta como una justificación difiere de una 'practica matemática' a otra. Esta noción de práctica matemática relativiza el problema del crecimiento del conocimiento matemático tanto histórica como culturalmente. De acuerdo con Kitcher, una práctica matemática comprende, aparte del ‘nivel técnico’ (tomamos prestado el término de E.T. Hall –ver Sierpinska, 1944) del lenguaje y enunciados aceptados, ‘un conjunto de cuestiones que [los prácticos] consideran como importantes y no resueltos, un conjunto de razonamientos que usan para justificar los enunciados que aceptan’, y una ‘meta-matemática’ (cf., Sfard, 1994), es decir, ‘un conjunto de perspectivas matemáticas que incorporan sus ideas sobre cómo se deberían hacer las matemáticas, la ordenación de las disciplinas matemáticas, etc.’ (Kitcher, 1988, p. 299). Kitcher continúa:

> El conocimiento matemático contemporáneo es el resultado de la [práctica primitiva, empíricamente fundada] … mediante una cadena de transiciones interprácticas, todas las cuales son racionales … Cada generación transmite a sus sucesores su propia práctica. En cada generación, la práctica se modifica por los trabajadores creativos del campo. Si el resultado es conocimiento, entonces la nueva práctica emergió de la antigua mediante una transición interpráctica racional. (p. 299)

La epistemología ‘naturalista’ de las matemáticas, según la propone Kitcher, tiene algunas características importantes –en particular su carácter social e histócio y la importancia que le atribuye a la práctica –en concordancia con la presentación general de Vygotsky de los fundamentos del conocimiento [científico].

1.3.2. Wittgenstein y Lakatos, y otras visiones sociológicas sobre las matemáticas

Ludwig Wittgenstein, cuyo primer trabajo *Tractatus Logico-Philosophicus* (1974) había intentado proporcionar un fundamento para el conocimiento en la correspondencia entre el lenguaje y la realidad, y le había convertido en un héroe del Circulo de Viena, produjo más tarde una posición filosófica directamente crítica de la mayor parte del *Tractatus*. En este último trabajo, Wittgenstein negó que los enunciados matemáticos se refirieran a objetos en absoluto. Al hacer matemáticas, argumentó, se transforman expresiones de una forma a otra y la corrección o no está determinada por cómo las personas usan estas expresiones y lo que se considera 'correcto'. El proceso de generación de enunciados matemáticos, mas bien que ser una operación mecánica (logicismo y formalismo), o una correspondencia con la intuición (intuicionismo), se refiere a la actividad social de 'obedecer una regla' (Wittgenstein, 1953, p. 202). La matemática es normativa, nos dice lo que debemos hacer, y su objetividad está en los procesos de seguimiento de reglas, públicamente mostradas, que los grupos sociales llaman matemáticas.

Es probable que Lakatos había leído y estuvo influenciado por el trabajo de Wittgenstein. Lakatos elaboró su aproximación al desarrollo del conocimiento matemático en sus *Pruebas y Refutaciones*. En otros escritos sobre la naturaleza de las matemáticas Lakatos (1978) propuso que las posiciones clásicas llamadas Logicismo, Intuicionismo y Formalismo eran programas Euclideos, centrados en desarrollar las matemáticas como sistemas que aseguran la transmisión de la verdad desde axiomas indudables, por medio de ciertos procedimientos deductivos, hasta enunciados igualmente seguros. Argumentó que, por el contrario, la matemática procede de un modo similar a la ciencia, un cuasi-empiricismo, en la que la falsedad de los contraejemplos a las conjeturas se retransmite a los axiomas y definiciones. Si algo que se considera como un enunciado básico resulta ser falso en virtud de los axiomas y definiciones admitidas, en lugar de rechazar el enunciado, los axiomas y las definiciones se cambian para que se ajusten a dicho enunciado.

Aunque la 'clase' en las Pruebas y Refutaciones de Lakatos (1976) quizás no pretendía sugerir que las matemáticas proceden mediante negociación, o que la heurística sea la esencia de las matemáticas, en lugar de los resultados, ha sido considerada de ese modo por los educadores matemáticos.

Como hemos mencionado anteriormente, la mayoría de los matemáticos no apoyan una visión Lakatosiana ni Wittgensteiniana de la actividad matemática. Hersh (1979) ha explicado esto en términos de la 'seguridad' de los matemáticos profesionales, quienes creen en la existencia de los objetos matemáticos cuando trabajan con ellos, pero caen en el formalismo los fines de semanas, cuando se les pide que justifiquen su creencia.

Otra interpretación podría ser que la historia de los logros de las matemáticas en la ciencia, la tecnología y dentro de las propias matemáticas son tales que la noción del falibilismo potencial de sus resultados parece pedante (ver no obstante Grabiner, 1986; Gillies, 1992). Otra razón podría ser que la idea de las matemáticas como seguras, como comprometidas con los paradigmas de los significantes de 'verdad' y 'demostración', soporta una posición priviligiada de las matemáticas y sus académicos. No es claramente de interés para los matemáticos, o científicos, socabar sus posiciones y consideración profesional poniendo en tela de juicio la seguridad, la demostración o la verdad en matemáticas. Tales estudios y críticas son para algunos fines de semana, o son calificados como sociologías externas, esto es sociologías de las matemáticas o de falsas direcciones en el desarrollo del conocimiento matemático. La 'verdad' de las matemáticas no necesita ninguna sociología.

Con frecuencia los que escriben sobre tales cosas como la 'sociología de las matemáticas' son descartados por los matemáticos profesionales como científicos y matemáticos, y los demás, que habiendo terminado su vida productiva dentro de la ciencia o de las matemáticas, o nunca han sido realmente matemáticos en absoluto: todo lo que pueden hacer tales personas, se supone que es escribir *sobre* la ciencia o las matemáticas. Ya no son capaces, o nunca lo fueron, de hacer matemáticas. El mismo tipo de argumentos se puede hacer naturalmente de la posición Lakatosiana y los intereses a que sirve.

La dicotomía entre programas Euclideos y programas cuasi-empicistas o sociológicos tiene fuerte vínculos con las visiones de los profesores de matemáticas sobre su empresa y hay un considerable cuerpo de investigación que examina estos vínculos. (Dawson, 1969; Rogers, 1978; Nickson, 1981; Thompson, 1982; Lerman, 1983; Cooney, 1985; Ernest, 1985; Moreira, 1992; Monteiro, 1993; Seeger, 1994). Brevemente, la matemática se identifica bien como un cuerpo particular de conocimiento, un subconjunto del cual se considera apropiado para todos los escolares y un subconjunto algo más grande para los que pueden entra en la educación superior en temas matemáticos, o bien se identifica mediante tipos particulares de actividades que se llaman de matematización, incluyendo modelización, reconocimiento de patrones, generalización, demostración, etc. Esta última visión no pretende ignorar el cuerpo de conocimientos matemáticos como experiencia que se ha desarrollado mediante la matematización. En la práctica, los currículos nacionales, que en gran medida o exclusivamente especifican el contenido, obvian cualquier elección, y esto se confunde después con el problema de la enseñanza de estrategias o principios que planteamos a continuación.

El movimiento hacia la heurística, los procesos de hacer matemáticas como la característica esencial del tema, en lugar del su contenido, ha llevado y apoyado el trabajo investigativo y de resolución de problemas como un foco principal de las matemáticas escolares desde la década de los 1970. El interés creciente en Popper, Lakatos, Kuhn y otros fue paralelo al crecimiento del trabajo investigativo y de resolución de problemas en las escuelas por los profesores en grupos tales como la Asociación de Profesores de Matemáticas del Reino Unido. Como una aproximación a la enseñanza de las matemáticas se le dio un ímpetus por Polya (1945) y después por muchos otros escritores, en particular Mason, Burton y Stacey (1984) y Schoenfeld (1985). Esto es ahora una visión del conocimiento matemático debida a escritores y partidarios tales como Hersh (1979), Agassi (1982), Lerman (1983, 1986), Davis y Hersh (1980), y Ernest (1991) . Se trata abiertamente de un intento de aunar los contextos de descubrimiento y de justificación. Por ejemplo, Davis y Hersch (1980) escribió:

- Hecho 1: La matemática es nuestra creación; trata de ideas en nuestras mentes.
- Hecho 2: La matemática es una realidad objetiva, en el sentido de que los objetos matemáticos tienen propiedades definidas, que podemos ser o no capaces de descubrir (pp. 408-409) (839)

Y Ernest (1991) escribió:

> El constructivismo social vincula el conocimiento subjetivo y el objetivo en un ciclo en el que cada uno contribuye a la renovación del otro ... del conocimiento subjetivo (la creación personal del individuo), vía publicación al conocimiento objetivo (mediante el escrutinio intersubjetivo, la reformulación y la aceptación). (p. 43)

Presentaciones sociológicas fuertes del conocimiento matemático y su desarrollo han sido dadas por Bloor (1976, 1983) y Restivo (1985, 1992). Quizás en la descripción sociológica del conocimiento matemático y su justificación más desarrollada, Restivo (1992) afronta cuestiones tales como: Cómo podemos explicar las diferentes clases de matemáticas desarrolladas en diferentes sociedades; la abstracción matemática; la no-razonable aplicabilidad de los resultados matemáticos; la hegemonía de las matemáticas occidentales; el compromiso único de las matemáticas occidentales con la verdad y la prueba, etc. Por ejemplo, en relación a la abstracción, el argumento de Restivo (1992) es el siguiente:

> Los objetos con los cuales tratan los matemáticos son las actividades de los matemáticos. Al construir sobre las operaciones que ya existen, y convertirlas en entidades simbólicas sobre las que otras operaciones se pueden realizar, los matemáticos son auto-conscientes de construir sobre las actividades previas realizadas en su comunidad intelectual. (p. 84).

Restivo (1992) llamó la atención hacia una historia de las competiciones y rivalidades matemáticas que puso dichas actividades en contexto y ofreció por tanto un fundamento completamente sociológico para la generalización en matemáticas. Describió tipos de desarrollos matemáticos apoyados en estudios históricos de diferentes paises o regiones –los factores que llevaron a esos tipos se presentan como dependiente ampliamente de la naturaleza de la comunidad matemática en términos de su cohesión, tamaño, fuentes de apoyo, duración, relación con la religión, etc. De este modo las matemáticas de China se describen como una matemática de supervivencia; la de la India, como episódica; y la de Japón como sobre la revolución comercial.

Restivo (1992) era consciente de las limitaciones de las traducciones disponibles y de los documentos existentes, pero su objetivo era ofrecer posibles análisis sociológicos de diferentes tipos de desarrollos matemáticos, contrariamente a una explicación por medio de la lógica metafísica interna de la propia matemática. Por eso señaló que son igualmente posibles otras descripciones de aquellos períodos históricos. En la parte final de su libro desarrolló la posibilidad de una sociología fuerte de las matemáticas, apoyándose en la noción de que la mente es en sí misma una estructura social, dado que 'los yos, las mentes y las ideas no son meramente productos sociales; no son meramente socialmente construidos; son constructos sociales' I. 132).

La posición de Restivo (1992) comienza con un fundamento para la conjetura de que las representaciones matemáticas son constructos sociales. A continuación argumenta que a las llamadas 'ideas puras' se les puede dar unos fundamentos sociales y materiales –ciertamente que no tiene sentido afirmar que los estados y productos mentales puedan ser no-sociales o a-sociales – y termina con una discusión de las relaciones sociales de las matemáticas puras.

Una visión sociológica está particularmente interesada con la justificación del conocimiento socialmente valorado, siendo este el proceso por el que las comunidades se validan a sí mismas y establecen y retienen el poder. Esto se aplica también a una comunidad académica y a las subcomunidades dentro de ella. Hemos referido anteriormente al compromiso que tienen los matemáticos con el estatuto social de las matemáticas en la sociedad, y también ocurre igual para los educadores matemáticos y la consideración dada a las matemáticas en los currícula escolares en todo el mundo. De manera similar, dentro de la comunidad de la educación matemática se pueden identificar subgrupos con compromisos de diferentes tipos en perspectivas de investigación, estilos de enseñanza, etc.

1.4. Epistemologías del significado

La epistemología del significado puede ser indistinguible de la epistemología de la validez por aquellos quienes, como Frege (1892/1952), igualan significado con condiciones de verdad -aunque Frege sugirió que 'sentido' debería ser distinguido del significado, teniendo el primero orígenes sociales.

Pero, ¿es adecuado igualar significado con condiciones de verdad? Claramente no es difícil encontrar sentencias que tienen significado pero a las que no se aplican cuestiones de verdad (como, por ejemplo, sentencias interrogativas, órdenes, etc.). Además, hay sentencias cuyas condiciones de verdad son idénticas, aunque vehiculan diferentes significados. Por ejemplo, 'Afortunadamente, Gauss está muerto' y 'Desafortunadamente, Gauss está muerto', o 'p y no q' y 'p pero no q' (Strawson, 1971). Los teóricos de la comunicación –al menos algunos de ellos- afirman, sin embargo, que en cada sentencia hay un núcleo de significado que se puede explicar bien por medio de condiciones de verdad o alguna noción relacionada (como, por ejemplo, 'cumplimiento', en el caso de un deseo).

La igualación del significado con condiciones de verdad es inaceptable para cualquiera que se interesa no con la creación de una teoría coherente de la comunicación sino con la comunicación con éxito en la práctica de la enseñanza. Incluso si, en educación matemática, estamos interesados en construir teorías, nunca deberíamos perder de vista el fin último de estas teorías, que es la mejora de la práctica. Una teoría del significado que le permitiera a uno afirmar que enunciados tales como 'p y no q' y 'p pero no q' tiene el mismo significado no sería capaz de tener en cuenta y explicar muchos de los problemas de los estudiantes relacionados con la comprensión del lenguaje matemático (Girotto, 1989).

Los educadores matemáticos están mucho más interesados con la comunicación del significado que con la verdad, y están mucho más interesados con los pensamientos de los profesores y los niños que con las sentencias que profieren los profesores y los estudiantes. Están también tan interesados en el cambio y crecimiento de los significados matemáticos en las clases de matemáticas que en la acumulación de las verdades matemáticas que pueden tener lugar allá. Esto explica porqué algunos educadores matemáticos es posible que entiendan la epistemología como el estudio del 'estatus, estructura y significado del conocimiento' (Steinbring, 1994, p. 93) y basan sus análisis epistemológicos del contenido matemático sobre una teoría del significado. Así, por ejemplo, Steinbring usó una aproximación sistémica a la noción de 'concepto' inspirada por el triángulo semiótico de Ogden y Richard: significado es una triada de pensamientos, palabras y cosas. Esta teoría le permitió explicar las dificultades de comunicación de los conceptos matemáticos, y al mismo tiempo proponer ciertas condiciones necesarias para esta comunicación. Existen otras explicaciones de las dificultades en la comunicación matemática (ver, por ejemplo, Thomas, 1987; Fischer, 1988).

Una revisión global de las perspectivas filosóficas sobre el significado y una discusión de la relevancia de estas perspectivas para la psicología de la cognición se puede encontrar en Ernest (1990).

2. EPISTEMOLOGIAS DE LA EDUCACION MATEMATICA

2.1. ¿Epistemologías 'en' o 'de' la educación matemática?

Antes de emprender un examen de las orientaciones teóricas particulares que se han calificado como epistemologías de la educación matemática, dedicaremos un momento a lo que puede significar la noción de 'epistemología de la educación matemática. Si la epistemología es la teoría del conocimiento, y la epistemología de las matemáticas es la teoría del conocimiento matemático, entonces la epistemología de la educación matemática debe referirse al mismo estudio, pero de las proposiciones de la educación matemática mas bien que de las relativas a las matemáticas. Desearíamos examinar el cuerpo del conocimiento llamado de ese modo en ese dominio y preguntar cuáles son las fuentes de ese conocimiento, cómo se justifica, y cómo se desarrolla. Podríamos esperar una simetría de respuestas entre la epistemología de las matemáticas y de la educación matemática.

Piaget afirmó que el conocimiento lógico-matemático ser produce por medio de la abstracción reflexiva, mientras que el conocimiento científico requiere tanto abstracción empírica como reflexiva, lo que podría sugerir que los contextos de justificación para estos dos tipos de conocimiento podrían ser diferentes. Por otra parte, los sociólogos del conocimiento (como, por ejemplo, Bloor y Restivo) argumentarían que se deberían realizar análisis simétricos para todos los dominios del conocimiento cultural en términos de factores tales como las relaciones sociales de los miembros de esas comunidades en lugares y tiempos diferentes, y los intereses servidos por la 'propiedad' de los cuerpos de conocimiento. El estudio de los constructivistas radicales o de los post-estructuralistas como grupos sociales del conocimiento dentro de la comunidad de educación matemática serán tan importante como el de los logicistas o formalistas dentro de la comunidad matemática.

Desde muchos puntos de vista la educación es actividad que depende de muchos otros dominios de conocimiento, incluyendo la psicología, sociología, antropología, historia, filosofía y, en nuestro caso, de las matemáticas. Como una estructura institucional explícita, tiene ciertamente una historia variada a lo largo del mundo. Donde ha sido institucionalizada, la educación naturalmente ha servido siempre a propósitos específicos de grupos socio-culturales específicos y gobiernos y como tal ha estado necesarimente implicada con valores, expresados en términos de principios de enseñanza. En cuanto a los contenidos curriculares, estos han sido tan toscos como el de la escolarización general en la Inglaterra del siglo diecinueve, en el que a los chicos se les enseñaba la suficiente aritmética para capacitarles para que desempeñaran su papel de trabajadores en la sociedad industrial y no lo suficiente como para que pudieran desafiar a esa sociedad. A las chicas se les enseñaba sólo la aritmética requerida para capacitarles a gestionar la economía de sus familias.

Se podría esperar, sin embargo, que las epistemologías interesadas por el origen del conocimiento –es decir, las epistemologías genéticas- se aproximarían al conocimiento de la educación matemática y al conocimiento matemático de una manera unificada. De manera similar, las teorías sociológicamente orientadas tratarían también el conocimiento pedagógico de manera simétrica con el restante conocimiento. Por otra parte, algunas epistemologías del conocimiento matemático no se comprometen con las cuestiones de la adquisición del conocimiento. Esto es particularmente cierto para las epistemologías fundacionalistas de las matemáticas y aquellas aproximaciones que reducen la epistemología al estudio del contexto de justificación, lo que explica por qué estas epistemologías han tenido tan poco impacto sobre la educación matemática. Se hicieron intentos en esa dirección – los artículos publicados en *L'Enseignement Mathématique* al comienzo del siglo lo testifica. También tuvo lugar la propuesta de reforma de Felix Klein para construir un currículum sobre y alrededor del concepto fundamental de función (el llamado 'Programa Meran' –ver Gray y Rowe,

1993). Pero el efecto fue inapreciable.
(p. 842)

Si las ideas fundacionalistas del estructuralismo en matemáticas encontraron su camino en al educación matemática en los años sesenta (reformas de la Matemática Moderna, o de las Nuevas Matemáticas), se puede argumentar que esto fue solo porque estuvieron apoyadas por la epistemología genética estructuralista elaborada por Piaget y popularizada en libros tales como Estructuralismo (1970) y Ciencia de la Educación y la Psicología del Niño (1972). Piaget estaba hablando sobre cómo llegan los niños a conocer las matemáticas y no solo de cómo los enunciados matemáticos se justifican y se organizan en totalidades consistentes, o como los matemáticos adultos llegan a hacer descubrimientos o invenciones matemáticas.

La educación matemática, que trata no sólo con los mundos posibles de los contenidos matemáticos sino también con las mentes de los niños y los profesores, todo esto inmerso en un mundo socialmente complejo de instituciones educativas, no está necesitada de una epistemología genética, de una sociología y de una teoría de la cultura. Todas estas necesidades están reflejadas en las interpretaciones que los educadores matemáticos y los investigadores están haciendo de la epistemología constructivista Piagetiana, de las teorías inspiradas por Vygotsky y Bruner, la 'epistemología polémica' de Bachelard, y de otras visiones epistemológicas. En esta sección, echaremos una mirada a estas interpretaciones, las avenidas que abren y sus limitaciones.

2.2. Constructivismo

Los constructivistas se han comprometido con desarrollar un fundamento para las actividades de un profesor que podría decirse que se adapta a los principios de la teoría constructivista del aprendizaje. Para los constructivistas, no hay conexiones directas entre enseñanza y aprendizaje, puesto que el conocimiento del profesor no puede ser transmitido a los estudiantes, la mente del profesor es inaccesible a los estudiantes y viceversa, y la noción de conocimiento de la comunidad de matemáticos tropieza con la imposibilidad de internalización por el individuo.

Algunos constructivistas sociales están a favor de un proceso de enculturación, separado de, y además de, las construcciones y construcción de sentido del niño. Bauersfeld (1995), por ejemplo, ha sugerido que ‘la parte central de la enculturación matemática escolar se produce en un meta-nivel y se ‘aprende’ indirectamente’, y Cobb (1989) ha afirmado que las construcciones matemáticas de los niños están ‘profundamente incluenciadas por’ condiciones sociales y culturales. Teniendo en cuenta el lenguaje muy preciso en el que Piaget, von Glasersfeld y Steffe describen las construcciones cognitivas del niño, las explicaciones socio-constructivistas de la enculturación en términos de meta-niveles no especificados, aprendizaje indirecto e influencias profundas se pueden considerar mas bien como imprecisas (Lerman, 1996). Es consistente situar las interacciones sociales junto con las interacciones gráficas y senso-motoras como factores que generan perturbaciones en el individuo, como hacen Steffe y von Glasersfeld, y el medio socio-cultural como el límite específico del rango de posibles interacciones. El deseo de retener esa visión de las construcciones matemáticas (y de otras) y desear dar un mayor y ciertamente formativo papel a las influencias socio-culturales, conduce a la necesidad de otro proceso de aprendizaje, aunque no se especifique.

Para los constructivistas radicales, al nivel más general, el primer principio es que el profesor reconozca que no está enseñando a los estudiantes sobre matemáticas, 'les está enseñando cómo desarrollar su cognición' (Confrey, 1990, p. 110), y que el profesor es 'un aprendiz en la actividad de enseñanza' (Steffe y D'Ambrosio, 1995, p. 146). Se sigue de esto que la enseñanza es 'una tarea de inferir modelos de los constructos conceptuales de los estudiantes y de generación de hipótesis de cómo a los estudiantes se les puede dar la oportunidad de modificar sus estructuras de manera que lleguen a acciones matemáticas que puedan ser consideradas como compatibles con las expectativas y fines del instructor' (von Glaserfeld, 1990, p. 34).

El seguimiento de principios constructivistas no implica precisamente una aproximación a lo que los estudiantes hacen en su aprendizaje: ‘los principios básicos entran en la acitividad humana a través del principio de auto-reflexividad, lo que significa que aplicamos los principios básicos primero y principalmente a nosotros mismos en nuestras actividades’ (Steffe y D’Ambrosio, 1995, p. 146).

A un nivel más detallado, los educadores matemáticos constructivistas han intentado, por medio de experimentos de enseñanza, ilustrar cómo los investigadores pueden dar sentido a las conductas de los estudiantes en términos de sus posibles estructuras conceptuales existentes, con el fin de predecir lo que podrían ser actividades convenientes para extender sus estructuras matemáticamente. En esto hay al menos tres cuestiones importantes implícitas:

a) que investigar en una situación de experimento de enseñanza no es lo mismo que enseñar en una clase ordinaria;
b) que el proceso de extender las estructuras conceptuales necesita ser analizado, particularmente en términos de asimilación y/o acomodación; y
c) es necesario realizar un análisis sobre 'lo que significa una construcción más potente y efectiva', puesto que el fin del profesor de matemáticas es mejorar a sus estudiantes matemáticamente.

Respecto de la primera de las cuestiones anteriores, Steffe y D'Ambrosio (1995) se han apoyado en la noción de Maturana (1978) de dominios de fenómenos de interacción que no interseccionan en la que se hace una distinción entre el estudio del fenómeno de los componentes de la unidad y el estudio del fenómeno de la propia unidad. En relación a los conceptos y estructuras matemáticas de los estudiantes individuales argumentan que primero es el dominio de los fenómenos psicológicos, y el segundo el dominio de los fenómenos sociológicos. El profesor debe inevitablemente centrarse en el último, y los investigadores, incluso en experimentos de enseñanza, deben evitar confundir el primero con el último. Esto es completamente consistente con la noción de que, al nivel de lo individual, los constructivistas consideran el aprendizaje como las acomodaciones que hacen los estudiantes en sus esquemas conceptuales.

Al nivel de los grupos de estudiantes, Steffe y D'Ambrosio (1995) describen la enseñanza constructivista como interactuando con estudiantes en un espacio de aprendizaje cuyo diseño se basa, al menos en parte, sobre un conocimiento de trabajo de la matemática de los estudiantes. (Conviene observar, a este respecto, que Kilpatrick (1987) sugirió que las estrategias particulares de enseñanza no son exclusivas de, ni indicativas de epistemologías particulares). La reflexión sirve a dos propósitos: capacita al individuo para superar la experiencia particular y verla como un objeto propio, y puede ofrecer la posibilidad de escuchar otras voces procedentes de otros estudiantes, dándole la oportunidad de compararlas y contrastarlas con su propia visión. Las acciones de enseñanza, naturalmente, están en el dominio de las interacciones sociales y por tanto el estímulo de la comunicación interactiva matemática, verbal y de otro tipo, puede favorecer la reflexión y 'promover su conocimiento matemático de manera apropiada y oportuna' (Steffe y D'Ambrosio, 1995, p. 156).

Sobre el segundo problema, Steffe y D'Ambrosio (1995) distinguen entre situaciones y problemas o tareas (Simon, 1995), argumentando que en su uso de las primeras intentaban 'promover, sostener, estimular, y modificar la matemática de los estudiantes' (p. 157). Recomendaron 'situaciones que implicaran generalización asimiladora', que sugieren como el modo constructivista de hablar de la transferencia del conocimiento (Steffe y Wiegel, 1994). El énfasis está en la neutralización de las perturbaciones. Los problemas y tareas propuestos por el profesor en puntos clave donde los consideran necesarios, se dirigen más bien a la acomodación por medio del establecimiento de conflictos cognitivos para los estudiantes. 'Intento de diferentes maneras promover el desequilibrio de modo que los estudiantes reconsideren el problema' (Simon, 1995, p. 129). Esto es un área de debate dentro del constructivismo (ver los tres primeros artículos de Marzo de 1996 del *Journal for Research in Mathematics Education* (Volumen 26).

Reflexionemos a continuación sobre el tercer problema. Si el aprendizaje en este contexto no se puede expresar en términos de apropiación de herramientas culturales de las matemáticas de la comunidad, los constructivistas deben hacer frente al problema de especificar la dirección en la que el aprendizaje matemático debería proceder para cada individuo. Puesto que el aprendizaje es un proceso de construcción, los estudiantes estarán haciendo eso en cualquier situación de clase que exista.

Las clases constructivistas se han distinguido como aquellas que estimulan la construcción de poderosas y efectivas construcciones en matemáticas (Confrey, 1990; Simon, 1995). Al afrontar la cuestión de cómo los estudiantes pueden construir tales ideas matemáticas poderosas, Confrey sugirió que, en primer lugar, los estudiantes deben creen en su conocimiento puesto que esa creencia en lo que ellos construyen implica conocimiento, desde una perspectiva constructivista. Por tanto la cuestión de la autonomía del estudiante es crucial. Dado esto, Confrey (1990) argumenta que se puede listar lo que caracteriza a una poderosa y efectiva construcción desde un punto de vista matemático:

1) Una estructura con una medida de consistencia interna;
2) Integración a lo largo de una amplia variedad de conceptos;
3) Convergencia entre múltiples formas y contextos de representación;
4) Habilidad para reflexionar sobre ella y describirla;
5) Continuidad histórica;
6) Lazos con varios sistemas de signos;
7) Acuerdo con los expertos;
8) Potencial para actuar como herramienta para posteriores construcciones;

9) Guía para futuras acciones; y
10) Habilidad para ser justificada y defendida (pp. 111-112)

Se pueden diseñar programas de enseñanza con el fin de facilitar el desarrollo de estas características de la actividad matemática, como el trabajo de Confrey (1991) sobre representaciones múltiples mostró.

2.3. Visiones socio-culturales

La etiqueta 'socio-cultural' se usa aquí para denotar epistemologías que ven al individuo como situado dentro de culturas y situaciones sociales de tal modo que no tiene sentido hablar del individuo o de conocimiento a menos que sea visto a través del contexto o de la actividad. Conocimiento es conocimiento cultural considerado como socialmente producido, siempre potencialmente cambiable, trabado con valores sociales y regulado socialmente. Por tanto, lo que constituye conocimiento matemático es una norma social: 'Si hay confusión en nuestras operaciones, si cualquiera calculara de manera diferente, y cada uno de modo diferente en distintos momentos, entonces incluso no habría calculo' (Wittgenstein, 1956, V.5), y 'si la regla es la excepción y la excepción es la regla; o si ambos llegan a ser fenómenos de aproximadamente igual frecuencia - esto haría nuestro juego de lenguaje perder su objeto (point)' (Wittgenstein, 1953, 142).

Una característica de las tendencias cambiantes en la investigación en educación matemática durante los años recientes ha sido el interés creciente y la focalización sobre el contexto social de la clase de matemáticas. (..) El papel jugado por el contexto social en el desarrollo de los individuos o de los grupos ha sido teorizado implícita o explícitamente, de muchas maneras; lo que demarca los intereses actuales es un desplazamiento desde la identificación de factores sociales como el dominio de lo afectivo a una preocupación con la parte que el entorno social y cultural juega como un todo en el desarrollo del niño. Con relación al conocimiento, estos intereses reflejan un apartase del conocimiento como un a priori y también un apartarse del conocimiento como lo que se construye individualmente hacia el conocimiento como socialmente construido y justificado.

Lave (1988) desarrolló la noción de conocimiento-en-acción en contraste a una perspectiva cognitiva, y localizó las matemáticas en diversos contextos en los que actúan las personas. Sus estudios han sido en su mayor parte sobre las prácticas ‘matemáticas’ en situaciones de la vida diaria y de los lugares de trabajo. En sus pocos comentarios sobre las matemáticas escolares enfatizó su orientación hacia técnicas y destrezas generalizables que se suponen son aplicables a la vida diaria y fue, naturalmente, crítica en esa aproximación.

> Las prácticas comunes a la investigación cognitiva y de la escuela tratan la aritmética, la lógica, y los cálculos monetarios como ejemplos de ‘pensamiento racional’ ... La práctica matemática se describe como ejercicio mental general. Las matemáticas en su envoltura pedagógica convencional se presenta en la forma de ‘puzzles-cápsula’ –‘problemas’ – con finalidades prefabricadas y explícitas, empleando sólo información ‘factual’; los procedimientos se interpretan como medios técnicos libres de valores. (Lave, 1988, pp. 172-173).

Ni Wittgenstein ni Lave se comprometieron en profundidad con cuestiones pedagógicas. Vygotsky y sus seguidores, por el contrario, estuvieron interesados centralmente con el aprendizaje (y la enseñanza). De hecho, Vygotsky no trata con cuestiones sobre la naturaleza de las matemáticas o cualquier otra forma de conocimiento (excepto para la psicología, que intentó redefinir y reestructurar como una ciencia materialista, construida sobre, pero rechazando de manera esencial el conductismo). Para Vygotsky cualquier conocimiento se considera que es lo que es en cualquier tiempo y lugar, y el propósito de la educación es pasar ese conocimiento cultural a la próxima generación. Siguiendo a Marx, Vygotsky consideró la conciencia como un producto del tiempo y del espacio, en particular de las relaciones económicas y la posición de uno dentro de ellas, y, particularmente en las reformulaciones de Vygotsky, también de la situación (es) cultural (es) de uno.

Vygotsky se interesó por la naturaleza de la conciencia y en particular con su desarrollo. Para él, la comunicación conduce la conciencia y, por tanto, el proceso de aprendizaje era integral para la comunicación. Identificó dos tipos de pensamiento, pensamiento ordinario o espontáneo y pensamiento científico o teórico. Este último es el que pretende de modo consciente la enseñanza y aprendizaje mediante la apropiación por el niño del conocimiento cultural. El primero es el que se logra de manera informal por medio de las interacciones del niño con los compañeros y los adultos -aunque Vygotsky, en su corta vida de trabajo como psicólogo, dijo poco sobre este estadio.

Vygotsky (1978) identificó una región que llamó 'la zona de desarrollo próximo', que era la diferencia entre lo que un niño podía hacer por sí mismo y lo que podía hacer con la ayuda de un compañero o un adulto experimentado. Este concepto fundamental estableció que todo el aprendizaje tiene lugar con otros, y que el aprendizaje tira de cada persona, de modo que lo que ve hacer a otros hoy, lo hará con ellos mañana y solo después. El aprendizaje conduce al desarrollo, una aproximación que Vygotsky señaló en contraste directo con los escritos de Piaget para quien el desarrollo, en la forma de estadios de desarrollo del niño, conduce el aprendizaje. Vygotsky sugirió que este planteamiento deja al niño practicando su conocimiento de ayer.

El proceso de internalización era otra característica fundamental del pensamiento de Vygotsky. Para Vygotsky, 'el proceso de internalización no es la transferencia de 'un plano de consciencia' externo a otro interno preexistente; es el proceso en el que este plano se forma' (Leontiev, 1981, p. 57). Por tanto hay una unificación de la enseñanza y el aprendizaje en el nivel escolar.

Una característica importante de la aproximación de Vygotsky, y de considerable importancia para este capítulo, es el sentido en que el mundo, y los individuos dentro de él, son productos de su tiempo y lugar. En particular, la psicología del individuo, expresada como consciencia, se forma mediante la mediación de herramientas, que son expresiones de la situación social, histórica y cultural. Esto lleva al sujeto y al objeto juntos, superando la dualidad cartesiana. Esto implica que no hay fundamentos para afirmar que existe un paralelismo entre los obstáculos epistemológicos en matemáticas, por ejemplo, y los obstáculos cognitivos en el aprendizaje. Los nuevos conocimientos y las estructuras de conocimiento llevan a un desplazamiento en el 'mundo'; no es lo mismo que fue antes.

Por ejemplo, según la historia de las matemáticas en Occidente, el desarrollo del concepto de número negativo estuvo cargado de obstáculos epistemológicos; muchos matemáticos, incluso hasta el siglo diecinueve, eran reacios a aceptar el concepto (aunque parece claro que los autores Babilónicos de alguna de las tablillas de arcilla de alrededor de 1500 A.C. encontraron más fácil de aceptar tales números). Ahora consideramos los negativos como parte de los enteros, y los niños pueden aprender su naturaleza sin tener que recrear esa historia (parcial); no hay ninguna razón, excepto una hipótesis a priori, de porqué debería haber un paralelismo similar (Lerman, 1995).

De igual modo, siguiendo un estudio del nacimiento de la moderna geometría algebraica vista como una reacción contra la escuela clásica Italiana, Bartolini-Bussi y Pergola (en prensa) también hacen una distinción entre los estudios históricos y el proceso de enseñanza-aprendizaje.

> Tener en cuenta el pasado no quiere decir identificar el aprendizaje individual y en la clase con la recapitulación de la historia: en primer lugar el proceso es colecivo y depende de innumerables individuos y factores sociales tanto internos como externos a las matemáticas; debido a esta gran complejidad no es una buena opción para modelizar el proceso global de aprendizaje... El aprendizaje en la escuela no se puede reducir a crear de nuevo; tiene que ser también concebido como apropiación, esto es, el proceso que tiene como resultado final la reproducción por el individuo de las propiedades humanas históricamente formadas, las capacidades y los modos de comportamiento (Leont’ev, 1981). Para que tenga lugar la apropiación la introducción de útiles de mediación (Vygotsky, 1978: objetos físicos como también sistemas simbólicos) es crucial: esta introducción es realizada desde el exterior por el representante de la cultura en la clase, esto es, el profesor es quien puede acelerar, mezclar, prescindir e incluso invertir, si fuera necesario, cualquier posible recapitulación del proceso histórico.

En términos de investigación, quizás la aproximación más desarrollada acorde con estas líneas ha sido en la Teoría de la Actividad (Garnier, Bednarz y Ulanovskaya, 1991). Aunque Vygotsky señaló la centralidad de la noción de la persona actuante, enfatizó 'el significado' como la mediación entre el individuo y el mundo. La sociedad y la cultura son mediatizadas para el niño por medio de herramientas, y en particular herramientas culturales ('Es el mundo de las palabras el que crea el mundo de las cosas' -Lacan, 1966, p. 155). En particular, el pensamiento y el lenguaje tienen que ser vistos como dialécticamente relacionados. El lenguaje ofrece al niño significados histórico-culturales heredados pero cada participante en la conversación y otra actividad usa aquellas herramientas intersubjetivamente para reconfigurar (re-shape) los significados en la comunicación y la acción. Se señala con frecuencia que Leontiev enfatizó la actividad como la mediación, pero debería quedar claro en la sentencia previa que el foco de Leontiev estaba muy próximo a la formulación de Vygotsky.

Según el punto de vista de Leontiev, la actividad orienta a los participantes y les proporciona el significado y la motivación inicial. Los significados están socialmente centrados, mientras que el sentido es la perspectiva del individuo. Las acciones de los individuos dentro de la actividad están siempre motivadas por el sentido, que incorpora cognición, cultura y afecto. Finalmente, existen las operaciones o los movimientos específicos que hacen los individuos en respuesta a fenómenos específicos. Tomando un bien conocido ejemplo de Leont’ev, en una actividad de caza grupal, una persona, el ojeador, tendrá el papel de rodear a la presa golpeando el suelo y llevando la presa hacia los cazadores. Las acciones de esa persona sólo tienen sentido dentro del contexto de la actividad. Si hay una roca en el camino, el ojeador la rodeará; esta es una operación.

Las características finales de la aproximación de Vygostky que se describirán aquí fueron tomadas de Marx y desarrolladas posteriormente por Davydov. Estas son el ascenso a partir de lo abstracto a lo concreto en el desarrollo de los conceptos científicos en la zona de desarrollo próximo, y la significación de la dialéctica al analizar las estructuras del pensamiento. En matemáticas, Davydov se apoyó en estas nociones y estudios experimentales para cuestionar la expectativa familiar de que los niños deben emprender actividades concretas antes de poder generalizarlas hacia lo abstracto. Informó de un número de experimentos que había realizado con niños en la escuela elemental trabajando con álgebra. Enfatizó las características generales del lenguaje de los niños incluso cuando aprecian estar comprometidos con el nivel concreto, así como la naturaleza dialéctica de la relación concreto/abstracto como siendo distinta de una progresión lineal de uno a otro (ver Cobb, Perlwitz y Underwood, 1994; Lompscher, 1994). El trabajo de Davydov ha sido desarrollado, en educación matemática, entre otros por Lins (1994).

2.4. Perspectivas interaccionistas

El interaccionismo puede ser incluido como una de las aproximaciones a la teoría e investigación sobre el desarrollo que promueve una visión socio-cultural sobre las fuentes y el crecimiento del conocimiento. Lo que le distingue de otras aproximaciones, sin embargo, es que las interacciones (de diverso tipo) no son consideradas como meros auxiliares y factores útiles de desarrollo (Voigt, 1995, p. 164). El desarrollo y las interacciones se ven como inseparables. Se enfatiza que el foco del estudio no es el individuo sino las interacciones entre individuos dentro de una cultura (Bruner, 1985; Bruner y Bornstein, 1989). El lenguaje (o más bien, 'languaging') es muy importante: es visto como un 'moldeador activo de la experiencia', no como 'un espejo pasivo de la realidad' (citado en Bauersfeld, 1995, p. 283). Los interaccionistas citan a menudo la frase de Wittgenstein: 'the speaking of a laguage is ... a form of life' (Wittgenstein, 1974, citado en Bauersfeld, 1995, p. 279).

La aproximación interaccionista en educación matemática proviene, entre otros, del interaccionismo simbólico de Mead (1934) y Blumer (1969), la etnometodología de Garfinkel (1967), el 'frame analysis' de Goffman (1974), la filosofía del lenguaje del último Wittgenstein, y la teoría de la adquisición del lenguaje de Bruner y sus colaboradores. También los trabajos de Lave (1988), Lave y Wenger (1991), Walkerdine (1988), y Edwards y Mercer (1993) se citan a menudo. Encontramos estas referencias y una exposición de las visiones interaccionistas en los escritos de Bauersfeld, Voigt y Krummheuer (por ejemplo, en Cobb y Bauersfeld, 1995). Existen otros investigadores que trabajan dentro de un núcleo de supuestos similares, algunos de ellos haciendo explícito su parentesco con el interaccionismo y otros no (Steinbring, 1989; Yackel, Cobb y Wood, 19912; Cobb y Yackel, 1995). Ideas epistemológicas próximas al interaccionismo aparecen a veces bajo un nombre diferente -como, por ejemplo, el construccionismo social propuesto por Gergen (1995).

Algunos de los primeros investigadores constructivistas comenzaron a inclinarse hacia el interaccionismo al intentar resolver, por sí mismos, el dilema entre la idea del conocimiento matemático como una construcción subjetiva de la mente y su concepción como una entidad objetivamente existente fuera de la mente. Por ejemplo, la reflexión de Paul Cobb fue:

> El modo más sugerente que yo veo es complementar el constructivismo cognitivo con una perspectiva antropológica que considere que el conocimiento cultural (incluyendo el lenguaje y las matemáticas) se regenera continuamente y modifica por las acciones coordinadas de los miembros de las comunidades. Esta caracterización del conocimiento matemático es, naturalmente, compatible con descubrimientos que indican que las prácticas matemáticas auto-evidentes difieren de una comunidad a otra ... Además, tiene en cuenta la naturaleza evolutiva del conocimiento matemático puesta de manifiesta por el análisis histórico ... (Cobb, 1990, p. 214, citado en Steinbring, 1991a).

Para un educador matemático interaccionista , el aprendizaje no es precisamente un compromiso de la mente individual que intenta adaptarse a un entorno, no se puede reducir a un proceso de enculturación a una cultura pre-establecida. En la clase de matemáticas, la construcción individual de los significados tiene lugar en interacción con la cultura de la clase mientras que al mismo tiempo contribuye a la constitución de esta cultura (Cobb y Bauersfeld, 1995, p. 9)

Esta propiedad de la relación entre la actividad individual de los estudiantes y la cultura de la clase se llama reflexividad. La noción de reflexividad es bastante central para las aproximaciones interaccionistas. Una implicación importante de la hipótesis de la reflexividad es que lo que se aprende eventualmente por los estudiantes individuales en la clase depende del tipo de microcultura en cuya creación han participado.

Aunque las comprensiones individuales de los profesores y estudiantes contribuyen a la elaboración de los significados matemáticos característicos de una cultura de la clase dada, puede que no sea posible atribuir la autoría de un significado a alguien en particular. Los significados se pueden elaborar por medio de negociaciones por las que el grupo llega a estar de acuerdo sobre ciertas convenciones en la interpretación de signos, situaciones, y conductas. El resultado final de estas negociaciones tiene propiedades emergentes: por la interacción, las contribuciones individuales pueden añadir algo sobre lo que nadie en particular había pensado y anticipado.

Otra posición importante del interaccionismo es que la gente aprende indirectamente, mediante la participación en una cultura y sus prácticas discursivas. En particular, los estudiantes aprenden lo que cuenta como pensamiento matemático observando lo que se espera.

La orientación interaccionista hacia el lenguaje lo distingue tanto del constructivismo como de la perspectiva Vygotskiana, aunque comparte con ellos el rechazo de una visión representacionista del lenguaje ('el lenguaje como una representación del mundo'). En el constructivismo, el lenguaje es una expresión del pensamiento ('El lenguaje es moldeado sobre los hábitos de pensamiento' -Piaget, 1959, p. 79). Vygotsky vio en el lenguaje un medio de transmisión cultural. El interaccionismo deja de ver el lenguaje como un objeto separado -un útil- que puede ser usado para un propósito u otro (y que, en principio, podría ser reemplazo por algo diferente: algún otro medio de comunicación). Las personas no están tanto como hablando un lenguaje como que están 'languaging' (Bauersfeld, 1995). El lenguaje crea una realidad; “languaging” es vivir en esta realidad. O bien, según Gergen (1995):

> Empleamos el lenguaje no como un medio de reflexión sobre el mundo o auto-expresión, sino (siguiendo a Wittgenstein) como podriamos movernos en un juego. Usamos el lenguaje para realizar acciones dentro del juego, y los demás podrían responder a estas acciones en virtud de las reglas del juego localmente establecidas. Como ilustración, cuando digo, ‘Sé que esto es así’, el término *sé* no es una imagen de mi condición mental. Esto te invita a tratar mi expresión con respeto y autoridad; indica que si tú me cuestiones yo sostendré lo que he dicho. (p. 27).

Relacionado con esta actitud hacia el lenguaje está el postulado del carácter discursivo del conocimiento. En particular las matemáticas son vistas como un tipo particular de discurso. 'El discurso' , sin embargo, no es justamente 'lenguaje'; es lenguaje-en-acción, o lenguaje como un medio para lograr fines cognitivos, sociales u otros. Es un 'vehículo para hacer cosas con y para otros' (Bruner, 1985). Como un discurso, las matemáticas establecen un cierto universo: las matemáticas son un modo de ver el mundo, y pensar sobre él. Como este universo es establecido por medio de la comunicación y la construcción de convenciones y comprensiones compartidas de los contextos (Bruner, 1995), el tipo de conocimiento matemático que los estudiantes desarrollan depende de las características de las situaciones de comunicación en que ellos se desarrollan.

Este supuesto sobre el conocimiento conduce a mirar la educación como ‘un proceso comunicativo que consiste principalmente en el crecimiento de contextos mentales compartidos y términos de referencia por medio de los cuales los diversos discursos de la educación (los diversos ‘sujetos’ y sus capacidades académicas asociadas) llegan a ser inteligibles para aquellos que los usan’ (Edwards y Mercer, 1993, p. 62). El fin de la comunicación en educación es visto, desde esta perspectiva, como el establecimiento de ciertos modos compartidos de comprensión y conocimiento.

El constructivismo, que critica la 'idea del conocimiento como representación de una realidad 'externa' que se supone ser independiente del conocedor' (von Glasefeld, 1993) no va tan lejos como para afirmar que el conocimiento es un discurso. De acuerdo con el constructivismo, la función primaria del lenguaje es expresar pensamientos individuales, no crear objetos culturales. Los pensamientos constituyen conocimiento en un individuo. Estos pensamientos son una función de los esquemas operacionales del sujeto que, aunque no son copias de una 'realidad externa', son todavía 'representaciones' en el sentido de modelos de las acciones del sujeto sobre alguna realidad física o mental. No se considera que estos modelos guarden ninguna 'semejanza' con estas acciones -su relación con las acciones es simbólica mas bien que icónica- pero se supone que tampoco tienen un carácter lingüístico.

En algunas presentaciones de las posiciones interaccionistas, el carácter convencional del conocimiento es enfatizado (ver, por ejemplo, Bauersfeld, 1995; Gergen, 1995). 'Convencional', sin embargo, no quiere decir 'arbitrario', ni 'formal'. La calificación se refiere a las connotaciones de 'convención' tal como 'acuerdo' o 'consenso' sobre un conjunto de asuntos. Se refiere a la hipótesis de que los significados se logran por medio de negociación (Bauersfeld, 1995, p. 277)

Las nociones de dominio consensual, y las actividades o significados compartidos (taken-as-shared), describen, en el interaccionismo, un fenómeno que Piaget explicó diciendo que la coordinación de acciones intra- e inter-individuales 'constituyen un proceso único e idéntico' (Piaget, 1972, p. 71). Vygotsky también consideró la existencia de un hecho cultural o un atributo de la 'mente colectiva': esto es el fenómeno de la 'objetividad' aparente del conocimiento o la creencia de que el conocimiento existe fuera de las mentes individuales.

El significado compartido no es algún tipo de intersección (en el sentido de la teoría de conjuntos) de las comprensiones individuales de los interlocutores; mas bien se trata de una interpretación de la cual puede que no sean conscientes, pero que les permite interactuar suavemente y hacer predicciones acertadas sobre las acciones y movimientos de los demás. 'Actúan como si estuvieran pensando de la misma manera [aunque de hecho] varias interpretaciones se pueden considerar' (Voigt, 1995, pp. 172-173). En su explicación del término, Voigt refiere a Blumer (1969): 'El significado de una cosa [para mi] resulta de los modos en que otras personas actuan [hacia mi] en relación a la cosa'.

En el interaccionismo, la cultura tiene una posición especial. Ni se ignora ni se da por supuesta (taken for granted): es el objeto de estudio más básico. Algunos de los problemas centrales que ve el interaccionismo para la educación matemática son:

- ¿Cómo se constituyen interactivamente los significados matemáticos en las diferentes culturas de la clase de matemática?
- ¿Cómo se estabilizan estos significados?
- ¿Cómo son estos significados y cómo dependen del tipo de cultura de la clase en que evolucionan?

Los interaccionista afirman que su teoría puede explicar ambos hechos, que las culturas cambia (lo que, como ellos argumentan, la aproximación Vygotskiana falla en hacer), y el hecho de son identificables, esto es presentan una estabilidad relativa (lo que, según ellos, las aproximaciones individualistas tales como el constructivismo fallan en hacer). Las propiedades de reflexividad y de emergencia dan cuenta del cambio cultural; los patrones, rutinas y formas de interacción, y la recurrencia de temas de discurso da cuenta de la estabilidad de las culturas.

Los patrones de interacción repetibles son una consecuencia de una tendencia natural a hacer las interacciones humanas más predecible, menos arriesgadas en su organización y evolución. La investigación ha identificado varios patrones de interacción en la clase, tales como 'funnel pattern', 'elicitation', 'recitation' (Bauersfled, 1995), 'focussin pattern' (Wood, 1992), 'formatos de argumentación' (Krummheuer, 1992), diversos 'patrones temáticos de interacción' (Voigt, 1995), el patrón de interacción concreto-a-abstracto (Steinbring, 1993), entre otros. Las nociones de Brousseau de 'efecto Topaze' y 'efecto Jourdain' se pueden considerar también como resultados de un análisis de los patrones de interacción en la clase de matemáticas.

Algunos interaccionista han visto complementariedad, si no compatibilidad, entre el constructivismo y el interaccionismo, o entre la teoría de Vygotsky y el interaccionismo. En relación al primer par de aproximaciones, Bauersfeld (1995), por ejemplo, afirmó que aunque el individuo tiene que construir los significados por sí mismo, este proceso de construcción se basa en interpretaciones que tienen su fuente no el individuo sólo sino en sus interacciones con otros dentro de una cultura (p. 274). La atención del individuo está dirigida y orientada por lo que otras personas dicen y hacen. Una de las funciones principales del lenguaje es exactamente tal actividad orientada. Cobb y Yackel (1995), después de expresar la necesidad de hacer esfuerzos teóricos por coordinar las perspectivas constructivistas, llegaron a la idea de una 'aproximación emergente' (p. 24).

También se ha dicho que el constructivismo y el interaccionismo con complementarios en el sentido de que toman perspectivas diferentes sobre el conocer de las personas. El constructivismo es el punto de vista del individuo que trata de darle sentido al mundo. Interaccionismo es el punto de vista de un observador de la vida social; mira a las personas compartiendo significados y al funcionamiento del lenguaje como creador de significados (as it creates meanings).

Sin embargo, hay profundas diferencias entre las dos aproximaciones, especialmente las que se refieren al modo en que ven el lenguaje, la comunicación y el conocimiento (Gergen, 1995, p. 33)

Tanto Gergen como Bauersfeld ven las aproximaciones que promueven (construccionismo social e interaccionismo, respectivamente) como pasos teóricos en la superación de un dualismo epistemológico. Para Bauersfeld, el interaccionismo es un modo de superar el dilema entre las visiones individualistas y colectivistas sobre las fuentes del significado. De acuerdo con el interaccionismo, los significados no son generados ni por mentes individuales ni son un atributo de una 'mente colectiva' de una sociedad históricamente fundada, sino que están continuamente constituidos en interacciones cuyo carácter modelado (patterned) da cuenta de la relativa estabilidad de las culturas.

Gergen (1995) ve el construccionismo social como una epistemología que supera la oposición tradicional entre lo que él llama orientaciones hacia el conocimiento exógenas (empíricas y centradas en el mundo) y la endógena (racionalista y centrada en la mente). (p. 854). Para él, el conocimiento comienza con el lenguaje:

> "Cuando analizamos (assay) la acumulación cultural de lo que tomamos como conocimiento, encontramos primariamente un depósito de artefactos lingüísticos: textos, documentos, revistas, ... Si analizamos lo que consideramos como transmisión del conocimiento en la clase, de nuevo encontramos que primariamente nuestro foco está en el lenguaje: lecturas, discusiones, transparencias, y cosas similares" (pp. 23-24).

Haremos dos observaciones finales relativas a esta sección. La primera es una palabra de precaución con respecto a la visión interaccionista del conocimiento que enfatiza su carácter lingüístico y convencional. Los interaccionistas no pretenden socavar el poder del conocimiento. Reconocen que ciertas cosas se pueden hacer con palabras que no son fácilmente deshechas, caso de que puedan deshacerse en absoluto. Estas cosas pueden ser muy beneficiosas, pero también pueden ser muy perjudiciales. El conocimiento científico puede ser un tipo de discurso, pero tiene implicaciones sobre nuestras vidas que no son justamente palabras. La energía nuclear, naves espaciales, así como muchos dispositivos de la vida diaria (como los ordenadores que usamos para escribir este artículo) son productos de un esfuerzo científico y teórico que ha trascendido la esfera del discurso.

La otra observación es que el interaccionismo recupera algunos valores 'pasados de modo' en la educación. Bauersfeld, por ejemplo, ha enfatizado el papel de la calidad de la cultura en que cada uno vive para el desarrollo personal, y nos ha recordado el hecho de que el aprendizaje imitativo 'es la forma más común de aprendizaje en una cultura' (p. 283). Considera que el profesor juega un papel importante, ciertamente, una parte crucial en el proceso educativo: 'Como un agente de la cultura inmersa, el profesor funciona como un compañero con una misión especial y poder en la cultura de la clase. El profesor, por tanto, tiene que tener un cuidado especial de la riqueza de la cultura de la clase -riqueza en ofrecimientos, desafíos, alternativas, y modelos, incluyendo languaging' (p. 283).

Voigt (1995) también enfatizó el papel del profesor, en particular, porque establece las normas socio-matemáticas, y por tanto define lo que contará como pensamiento matemático (p. 197). El interaccionismo, de hecho, encuentra buenas razones para apoyar ciertos patrones de interacción en la clase que han sido muy criticados en tiempos recientes, como poner demasiado énfasis en las destrezas y el 'aprendizaje memorístico' y no suficiente en la comprensión (Merttens, 1995).

2.5. Una aproximación antropológica a la epistemología en la didáctica francesa

Los educadores matemáticos que están trabajando dentro de la tradición que se ha desarrollado en Francia desde mediados de los setenta han dedicado mucho espacio en su trabajo a una reflexión sobre la epistemología de la educación matemática, esto es, sobre la naturaleza de este conocimiento- que lo han llamado 'didáctica de la matemática'- sobre su objeto como un campo de investigación científica, sobre su lugar entre las demás disciplinas, sobre los modos en que este conocimiento es construido y validado. (citas)
También han hecho investigación sustancial sobre la epistemología de nociones y dominios matemáticos específicos. El modo en que se aproximan a las cuestiones epistemológicas, difícilmente se ajusta a alguna de las tres amplias perspectivas descritas hasta ahora (constructivismo, socio-culturalismo, interaccionismo). Este es el motivo por el que les dedicamos una sección separada.

Los dos autores más citados en este dominio son Guy Brousseau e Yves Chevallard, el primero por su 'teoría de las situaciones', el último por el concepto de 'transposición didáctica'. Estas teorías han conocido un rápido desarrollo durante los ochenta y, al comienzo de los noventa, Chevallard propuso un marco teórico más general, 'la antropología de los saberes', del que la teoría de la transposición didáctica foma parte.

2.5.1. La posición de Chevallard

La 'antropología del conocimiento' de Chevallard es una extensión de la epistemología, en el sentido de que, tradicionalmente, el objeto de estudio de la epistemología era la producción del conocimiento científico, mientras que la antropología del conocimiento se considera que se ocupa no solo con los mecanismos de la producción sino también con las prácticas relacionadas con el uso o aplicación del conocimiento científico, su enseñanza, y su transposición, esto es el tratamiento del conocimiento que hace que ciertos aspectos del mismo se adapten para funcionar en distintos tipos de instituciones (la escuela es una de ellas). Merece la pena observar que, si hubiera aceptado la interpretación ampliada de la epistemología de Chevallard, el título de nuestro capítulo podría haber sido abreviado como 'Sobre diversas aproximaciones a la antropología del conocimiento matemático'. En esta perspectiva, el estudio de los fenómenos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas serían una parte de una antropología del conocimiento matemático o su epistemología en este sentido ampliado.

La noción de transposición didáctica hizo en sus comienzos (Chevallard, 1985, 1990) ciertas hipótesis más o menos tácitas sobre el conocimiento matemático que la distinguen fuertemente del constructivismo epistemológico. Consideró que existe un objeto identificable llamado 'saber sabio matemático', contra el cual el contenido de las matemáticas enseñadas en las escuelas podía ser comparado y juzgado como 'legítimo' o no. Ya incluso la existencia de conocimiento fuera de las mentes de los individuos es inexplicable desde un punto de vista constructivista. También se asumió tácitamente en la teoría de la transposición didáctica que lo que se enseña será aprendido finalmente, con algún retraso, naturalmente, y posiblemente no por todos los estudiantes. Por tanto, existe un 'estado de conocimiento' (o 'experto') ideal al que la enseñanza y el aprendizaje deberían converger. De nuevo este supuesto es contrario a cómo los constructivistas ven los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Dados los supuestos del constructivismo, es imposible definir lo que constituye en general los estados de conocimiento del 'novato' o del 'experto' (Lesh y Kelly, 1994, p. 281). El conocimiento con que un estudiante dado llega a la clase depende de su experiencia matemática previa y modos personales del aproximarse a los problemas. El profesor sólo puede organizar entornos ricos de aprendizaje y facilitar el desarrollo del pensamiento matemáticos de los alumnos ofreciéndole actividades desafiantes (challenging), promoviendo la construcción por los estudiantes de sus propios modelos mentales, explorando las propiedades de estos modelos, comprobando el rango de su aplicación y su validez en nuevas situaciones (p. 283).

El producto final de estas actividades puede ser diferente para cada estudiante en términos de construcciones mentales, y, como tal, no puede ser planeado. Tampoco puede ser juzgado con relación a alguna entidad externa llamada 'conocimiento matemático'; el criterio de evaluación es la coherencia interna del modelo mental o sistema de modelos de cada estudiante particular.

Aunque Brousseau (1986a, b) también argumentó que hay una necesidad de diseñar y organizar actividades desafiantes, afirmó que el conocimiento diana puede y incluso debe ser planificado. Sus 'situaciones didácticas' pretenden construir, en los estudiantes, una 'génesis artificial' de ideas matemáticas específicas cuya génesis histórica y diversos aspectos en la teoría actual son comprendidos y conocidos.

La teoría de la transposición didáctica ha sido criticada debido, entre otros motivos, por la vaguedad de la noción de 'saber sabio matemático' (Freudenthal, 1986). Una respuesta a esta crítica (encontrada en Arsac, 1992) reveló el carácter sociocultural de la noción: la sociedad reconoce la existencia de un cierto grupo de profesionales que producen conocimiento el cual, en la cultura, se considera 'cognoscible' ('knowledgeable') (sabio) o 'científico' (en el sentido amplio que no reduce la ciencia sólo a la ciencia natural). Esta interpretación del conocimiento está próxima a la que Vygotsky consideró tácitamente (y no cuestionó) y quizás incluso más a la epistemología inherente a la aproximación de Bruner respecto de la adquisición del lenguaje.

En desarrollos más recientes de la teoría, se ha propuesto pasar de la comparación de tipos diferentes de conocimiento (conocimiento del investigador matemático versus matemáticas escolares) a un dominio más amplio de comparación de diferentes tipos de prácticas sociales (Martinand, 1989, in Arsac, 1992). Chevallard (1991) se interesa por las relaciones entre la práctica social de la investigación en matemáticas y la práctica social de la enseñanza y aprendizaje institucionalizado de las matemáticas en la escuela. Diferentes pares de prácticas sobre las matemáticas han atraído la atención de otros investigadores. Por ejemplo, Lave (1988) y Walkerdine (1988) estudiaron la falta de congruencia entre el funcionamiento del pensamiento matemático en la escuela y en esferas extraescolares de prácticas tales como en la administración de la casa, crianza de los niños, y el trabajo.

Centrándose sobre las prácticas sociales y las instituciones, mas bien que sobre el 'conocimiento', Chevallard extendió esta teoría (transposición didáctica) a las dimensiones de una antropología. Consideró que todo conocimiento es conocimiento de una institución. La investigación profesional en matemáticas es una institución, la escuela otra, la familia otra. Las matemáticas también 'vive' en la industria y los negocios. Puede vivir en cada una de estas instituciones, pero, por medio de adaptación, se convierte en una matemática diferente. Los estudios epistemológicos de las matemáticas deberían investigar las fuentes, modos de control, y mecanismos de crecimiento de las matemáticas en todos los 'nichos ecológicos' en que vive.

Esta 'aproximación antropológica' a la epistemología llevó a Chevallard a adaptar la noción de conocimiento del individuo. No hay ninguna cuestión de estructuras o modelos mentales en esta noción, sino una actitud ('un rapport'), una relación a y funcionamiento con respecto a lo que una institución define como lo que es conocimiento. Se conoce (o no) sólo con relación a una opinión de una institución, no en un sentido absoluto (Arsac, 1992).

En vista de los nuevos desarrollos en la teoría de la transposición didáctica, nos podemos preguntar si todavía tiene sentido usar el lenguaje de la 'corrección epistemológica' que caracterizó el discurso de esta teoría en sus primeras versiones 'medir la desviación (écart') entre 'saber sabio' y 'saber enseñado'; ejercer una 'vigilancia epistemológica'; 'poner en cuestión la legitimidad de un curriculum' si se aparta demasiado de las matemáticas de los matemáticos, etc.

Pero, desde el comienzo, la teoría de la transposición didáctica aportó ciertas distinciones epistemológicas útiles y sensibilizadoras. No necesitamos afirmar que las matemáticas escolares deberían ser 'legitimizadas' mediante su referencia a las matemáticas de los matemáticos universitarios, pero tenemos que admitir que los dos conocimientos son, epistemológicamente, objetos muy distintos. Ambos creen de fuentes diferentes y de manera diferente. Mientras que el desarrollo de la investigación matemática está inducida por los problemas, el motivo poderoso de progreso del aprendizaje matemático en la escuela es un tipo de dialéctica entre el 'material antiguo' y el 'nuevo'.

Además, las diferencias entre los contratos institucionales, dentro de los que ambos conocimientos se inscriben, son tales que cierta conducta matemática de 'tipo investigativo' puede ser difícil de obtener en la clase. Esto es especialmente verdadero en el caso de la actividad de demostrar. El tipo de formato de interacción que se establece en la clase de matemáticas lleva en sí mismo más a 'conductas argumentativas', en las que el fin es alcanzar un acuerdo, más que demostrar, que requiere establecer la verdad del enunciado (Balacheff, 1990b). Un cambio en esta situación requeriría una re-negociación de las reglas del contrato con los estudiantes. Esto puede ser, sin embargo, difícil:

> Debemos reconocer que la mayor parte del tiempo los estudiantes no actúan como hombres teóricos sino como prácticos. Su tarea es dar una solución al problema que el profesor les ha dado, una solución que sea aceptable en relación la situación de la clase. En este contexto la cosa más importante es ser eficiente, no ser riguroso. Se trata de producir una solución, no producir conocimiento... Esto significa que por encima de las características sociales de la situación de enseñanza debemos analizar la naturaleza del objetivo pretendido. Si los estudiantes ven el objetivo como 'hacer', más que como 'conocer', entonces sus ... conductas argumentativas podrían verse más como siendo 'económicas' que como conductas matemáticas. (Balacheff, 1990b)

Otra distinción útil lograda por la teoría de la transposición didáctica es la que se establece entre el conocimiento del profesor (el conocimiento para ser enseñado) y el conocimiento del que los alumnos se hacen responsables (el conocimiento para ser aprendido). Por ejemplo, el profesor será responsable de la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales, mientras que los estudiantes tendrán que demostrar que conocen cómo resolver dichos sistemas de ecuaciones. La distinción entre estas dos reglas epistemológicas diferentes en el contrato didáctico impone condiciones sobre lo que se va a considerar 'enseñable'. Una respuesta frecuente es que un conocimiento es enseñable si se puede algoritmizar (Chevallard, 1991).

La teoría de la transposición didáctica propone otros muchos constructos epistemológicos, entre ellos, las nociones de 'despersonalización' y 'descontextualización' del conocimiento. El proceso de transposición didáctica comienza cuando el matemático se dispone a comunicar sus resultados a sus colegas matemáticos. Este proceso lleva a eliminar del resultado la historia personal de su descubrimiento, su heurística, y el contexto de las cuestiones y problemas particulares dentro del que nació. El autor tratará de establecer su resultado al nivel más abstracto y general. Cuando el resultado se publica, es 'despersonalizado' y 'descontextualizado', es público, abierto a examen y a nuevas generalizaciones y aplicaciones en contextos diferentes.

En el proceso de aprendizaje, un proceso inverso tiene lugar. El aprendiz tiene que hacer el resultado como propio, creando una camino personal para su comprensión y encarnándolo en el contexto de los problemas en los está trabajando actualmente. El conocimiento debe convertirse en conocimiento personal.

La aproximación antropológica propuesta por Chevallard y el interaccionismo en educación matemática comparten ciertos puntos de vista y preocupaciones. Ciertamente, ambos ven la educación desde perspectivas sociales y culturales. Ambos dan prominencia a los procesos de creación de 'dominios de consenso' o 'milieus' donde ciertos elementos de la cultura se convierten en 'tomados-como compartidos', o 'allant de soi, transparentes'. Estos procesos son vistos como mecanismos que dan cuenta de la relativa estabilidad de las culturas. Ambas aproximaciones están interesadas por los mecanismos de cambio. Los interaccionistas están interesados en mirar la enseñanza y el aprendizaje a un nivel micro -desde dentro de la clase- y atribuyen un papel importante a las contribuciones individuales a los profesores y a los estudiantes: las nociones de 'reflexividad' y 'emergencia' dan cuenta del cambio en las culturas de la clase. Para Chevallard, que estudia 'los sistemas didácticos' a un nivel macro, la fuente de cambio está en el trabajo de la 'noosfera' o la interface entre las escuelas y la sociedad en su conjunto, donde la organización, los contenidos, y el funcionamiento del proceso educativo se conciben.

La noosfera se compone de grupos tales como los matemáticos, las comisiones ministeriales, los padres y directores escolares. Se ocupa de la 'manipulación' del conocimiento de acuerdo con las prioridades que emergen en la sociedad en un momento dado. En cierto momento, hay un sentimiento de que la matemática enseñada en la escuela debería ser próxima a las matemáticas de los matemáticos universitarios. En otro, se propone que la educación matemática en las escuelas prepare a los alumnos para las aplicaciones de las matemáticas en el trabajo, y la resolución de problemas de la vida diaria. Chevallard no asigna un papel importante en el proceso de cambio a los profesores, cuyo trabajo, según él, está limitado a la 'edición del texto del conocimiento que está determinado (aunque no escrito) por la noosfera' (Arsac, 1991, p. 17).

2.5.2. La teoría de situaciones de Brousseau

La teoría de situaciones de Brousseau ha sido extensamente estudiada y aplicada por los investigadores en Francia y en otras partes (ver Perrin-Glorian, 1994). En la base de esta teoría está la hipótesis epistemológica de que 'el conocimiento existe y tiene sentido para el sujeto cognoscente solo porque representa una solución óptima en un sistema de restricciones' (Brousseau, 1986b, p. 368). Aquí hay una semejanza con la idea Piagetiana del conocimiento como una actividad adaptativa que encontramos en declaraciones constructivistas tales como la siguiente de von Glaserfeld (1995):

> Desde la perspectiva constructivista, como enfatizó Piagét, conocer es una actividad adaptativa. Esto significa que se debería pensar del conocimiento como un tipo de compendio de conceptos y acciones que se han encontrado exitosos, dados los propósitos que uno tiene en mente. (p. 7)

El acto de conocer está por tanto 'situado' en un sistema de restricciones las cuales, mediante el feedback sobre las acciones del sujeto, le señalan el coste de los ensayos, errores, y el aprendizaje, entendido éste como un cambio en las 'relaciones al medio' del sujeto. El aprendizaje ocurre cuando la aplicación de nociones previamente construidas resultan ser demasiado costosas, y el sujeto está obligado a hacer adaptaciones o incluso rechazos.

Brevemente, un concepto no se desarrollará, si el sujeto nunca tiene una necesidad del mismo. Si todas las funciones con las que ha tratado un estudiante son continuas en todo punto, es probable que su comprensión de la expresión 'límite de a función en el punto x=a' se reducirá al 'valor de la función en x = a'. Si todos los espacios vectoriales que un estudiante ha visto son espacios en R^n, entonces probar que en un espacio vectorial arbitrario el vector nulo es único resultará carente de sentido para él. Para un concepto cuya enseñanza se pretende, la tarea del didacta consiste en organizar situaciones o sistemas de restricciones para las que el concepto dado aparecerá como una solución óptima (de menor coste).

¿Adónde encuentra uno guías sobre situaciones adaptadas para la enseñanza de un concepto matemático dado? Brousseau (1981, p. 48) sugirió un 'estudio epistemológico' del concepto, comprendiendo investigación sobre

- los significados del concepto dentro de la estructura de la teoría actual;
- las condiciones históricas y culturales de la emergencia del concepto (sus variadas formas intermedias, concepciones y perspectivas que crearon 'obstáculos' con respecto a la evolución del concepto, visto desde la perspectiva de la teoría actual, problemas que llevaron a una 'superación' de estos obstáculos y permitieron un desarrollo posterior);
- el estudio de la psicogénesis del concepto (o su 'epistemología genética')
- un 'análisis didáctico', esto es un estudio de los significados del concepto pretendido y/o

transmitido por su enseñanza, actualmente o en el pasado (incluyendo el estudio de la transposición didáctica o una comparación con los resultados de los análisis 'estructurales' e 'históricos').

El fin no es que los estudiantes recapitulen, en su aprendizaje, un proceso histórico-cultural del desarrollo de un concepto. El fin es encontrar un equilibrio entre una aproximación 'histórica' que haría al niño repetir muchas de las concepciones olvidadas del pasado, y una enseñanza directa del concepto tal y como aparece en la estructura actual, sin intentar construir el concepto sobre las concepciones de hoy del estudio ya que evolucionan dentro del marco de una cultura y una escolaridad. Brousseau propuso aquí un completo programa de investigación para la didáctica de la matemática que implica estudios epistemológicos, diseño de situaciones didácticas, experimentación, comparación del diseño con los procesos que tienen lugar de hecho, revisión de los estudios epistemológicos y del diseño, y estudio de las condiciones de la reproductibilidad de las situaciones.

Brousseau propuso que el diseño de las situaciones didácticas relativas a un concepto matemático dado se orientaran a la construcción de su 'génesis artificial', que simularía los diferentes aspectos actuales del concepto para los estudiantes, y que, sin reproducir el proceso histórico, conduciría no obstante, a resultados similares (Brousseau, 1981, p. 50)

Posiblemente inspirado por el trabajo de Lakatos sobre las reconstrucciones racionales de la génesis histórica de los conceptos matemáticos, Brousseau identificó varios tipos de situaciones didácticas, o estados de un contracto didáctico, que, para él, crearía un esquema general de una 'secuencia didáctica' o situaciones que provocan una 'génesis artificial' de un concepto matemático: situaciones centradas sobre 'la acción', donde los estudiantes hacen sus primeros intentos por resolver un problema propuesto por el profesor; situaciones centradas sobre la 'comunicación', donde los estudiantes comunican los resultados de su trabajo a otros estudiantes y al profesor; situaciones centradas sobre la 'validación', donde se deben usar argumentaciones teóricas mas bien que empíricas; y situaciones de institucionalización, donde los resultados de las negociaciones y convenciones de las fases previas son resumidas, y la atención se centra sobre los hechos 'importantes', los procedimientos, las ideas, y la terminología 'oficial'. A partir de la fase de institucionalización, el significado de los términos ya no es un objeto de negociación, sino de corrección, por referencia a las definiciones, las notaciones, los teoremas, los procedimientos aceptadas. Dentro de cada una des estas situaciones, hay un componente 'a-didáctico', esto es, un espacio y tiempo donde la gestión de la situación cae enteramente de parte de los estudiantes. Se considera que esta es la parte más importante, ya que, de hecho, el fin último de la enseñanza es lo que Brousseau llama la 'devolución del problema a los estudiantes', lo que Bruner llamó la 'handover' (traspaso) de una competencia desde el profesor a los estudiantes (Bruner, 1983; Edwards and Mercer, 1993).

El programa de investigación esbozado por la teoría de situaciones estaba dirigido a una elaboración de un cierto número de 'situaciones fundamentales' relacionadas con los conceptos matemáticos básicos enseñados en la escuela, que garantizaría, en cierto modo su adquisición por los estudiantes cualquiera que fuera la personalidad del profesor. (Berthelot y Salin, 1995).

La hipótesis básica de la teoría de situaciones de Brousseau es que el conocimiento construido o usado en una situación es definido por las restricciones de esta situación, y que, por tanto, creando ciertas restricciones artificiales el profesor es capaz de provocar que los estudiantes construyan un cierto tipo de conocimiento. Esta hipótesis está ciertamente más próxima al constructivismo que a las aproximaciones que se derivan de la noción Vygostskiana de zona de desarrollo próximo.

2.6. Aproximaciones basadas sobre epistemologías del significado

En alguna investigación en educación matemática, la epistemología es interpretada principalmente como una epistemología del significado (en matemáticas). Se ve esta como una reflexión sobre la naturaleza de los conceptos matemáticos, sobre los procesos y condiciones de su desarrollo, sobre las características de la actividad matemática actual y pasada, y sobre lo que constituye la naturaleza específica de un dominio matemático u otro.

Este es ciertamente el caso de los estudios relacionados con la teoría del significado del 'triángulo epistemológico', mencionada anteriormente en la discusión del trabajo de H. Steinbring. El programa de investigación esbozado en la teoría de situaciones de Brousseau estimuló este tipo de trabajo epistemológico, y más específicamente los estudios centrados alrededor de la noción de obstáculo epistemológico, prestado de Bachelard (1938).

La noción de obstáculo epistemológico se apoya en una filosofía de la ciencia antipositivista, y la hipótesis de que el proceso de crecimiento del conocimiento es básicamente discontinuo, no acumulativo y marcado por 'rupturas', 'umbrales' y redefiniciones importantes en los fundamentos de las teorías. Siguiendo este programa, algunos educadores matemáticos emprendieron estudios de los obstáculos epistemológicos relacionados con diversas nociones matemáticas (ver por ejemplo, Cornu, 1983; Sierpinska, 1985a,b, 1990; Scheneider-Gilot, 1988).

Pero los análisis epistemológicos de los conceptos o dominios matemáticos se han realizado fuera del programa de Brousseau, sin usar la noción de obstáculo epistemológico y /o sin adoptar una perspectiva histórica. Por ejemplo, la epistemología de Anna Sfard sobre el pensamiento algebraico, basado sobre la idea de una dialéctica entre los modos operacional y estructural de pensamiento, no hace ninguna referencia al concepto de obstáculo epistemológico sino que apoya sus afirmaciones con argumentos históricos (Sfard, 1991).

Otros investigadores han indagado en cómo diversos conceptos matemáticos funcionan en la teoría y cultura contemporánea. Marc Legrand ha sido capaz de explicar las dificultades de los estudiantes en análisis matemático mediante la comparación de los modos algebraico y analítico de pensamiento en el contexto de, por ejemplo, la relación de igualdad (pensando en términos de identidad de valores frente a pensar en términos de 'aproximación, mayoración, minoración' -ver Artigue, 1995). La teoría de la 'dialéctica útil-objeto' desarrollada por Régine Douady no fue una consecuencia de un estudio histórico, sino un resultado de un análisis de la actividad matemática contemporánea (Artigue, 1995).

Los estudios epistemológicos de Heinz Steinbring también han estado basados en una reflexión sobre la teoría matemática contemporánea. Steinbring (1991a,b) observó los conflictos inevitables que surgen en la enseñanza de las matemáticas cuando los profesores intentan introducir los conceptos matemáticos como 'generalizaciones concretas', neutralizando de este modo la distinción entre las explicaciones convencionales socialmente logradas y la 'naturaleza auto-referente de los objetos matemáticos' fundamentalmente teórica. Al analizar cómo los conceptos probabilísticos básicos se introducen en la enseñanza, Steinbring proporcionó un ejemplo de una interacción en clase donde los estudiantes observaban una discrepancia entre las expectativas teóricas del resultado de un proceso aleatorio (un juego de azar) y los resultados empíricos de hecho. Teóricamente, lo más probable era una pérdida, aunque en la jugada efectiva del juego se obtuvo una ganancia. Los estudiantes explicaron este conflicto afirmando que los resultados se habían debido al 'azar' o la 'suerte', y el profesor reforzó esta visión enfatizando la expresión 'azar', transmitiendoles la apreciación de que eso cerraba el tema. Actuando de ese modo el profesor estableció un 'marco interactivo' (Goffman, 1974) que proporcionaba a la palabra 'azar' de un poder general y explicatorio de todo. De este modo la diferencia entre experiencia y teoría se neutralizaba y se creaba un obstáculo para la construcción del concepto matemático de suceso aleatorio y de probabilidad como una medida de aleatoriedad.

Steinbring hizo una observación que es interesante desde el punto de vita de la epistemología de las matemáticas y de las relaciones entre la dimensiones subjetiva y objetiva del conocimiento. Afirmó que tales 'objetos universales' obtenidos mediante 'generalización concreta' de una reacción a un fenómeno son especialmente inaccesibles a la comprensión de los estudiantes.Tales constructos sociales no se pueden personalizar: operan sólo al nivel de la interacción social, parecen ser 'pura convención o pre-construidas completamente por las intenciones metódicas del profesor'. 'Sólo el conocimiento teórico', afirma Steinbring 'está abierto al individuo o al acceso personalmente subjectivo'.

2.7. Epistemología y una teoría de la instrucción

Morf (1994), al reflexionar sobre las dificultades que una teoría de la instrucción ('teoría didáctica') tiene, hasta ahora, para integrar la epistemología constructivista consigo misma, consideró el impacto de una epistemología dada sobre la teoría y la práctica de la enseñanza de las matemáticas. Parece que los dos dominios tienen objetos de estudio, orientaciones, fines y tareas totalmente distintos. Ambos miran a los fenómenos desde diferentes puntos de vista.

La complejidad es una consideración importante. Mientras una epistemología estudia el conocimiento como una relación entre un sujeto y un objeto, una teoría de la instrucción, tan pronto como toma en cuenta la actividad didáctica, debe tratar con al menos dos tipos de conocimiento, el conocimiento del estudiante (para ser transformado) y el conocimiento del profesor (para ser usado en esta transformación). En la práctica de la enseñanza, la situación es incluso más distante respecto de la epistemología que de la teoría de la instrucción, porque el conocimiento ya no se concibe como una relación entre un sujeto y un objeto, sino que se convierte en un aspecto del sujeto psicológico - enseñar significa transformar al sujeto cognitivamente. Una teoría de la instrucción que trata de incorporar una epistemología constructivista ha intentado reducir la complejidad poniendo aparte el conocimiento del profesor y ocupándose sólo del conocimiento del estudiante. La restauración del papel del profesor en una teoría constructivista requiere un serio esfuerzo de teorización (ver, por ejemplo, Simon, 1995).

Otro problema que obstruye los intentos de incorporar nociones de epistemología genética (tal como la epistemología genética Piagetiana) -que se centran esencialmente en la génesis del conocimiento- en una teoría de la instrucción es que 'la teoría de la instrucción tiene que dar una presentación del propio conocimiento, y orientar la acción hacia transformaciones específicas de este conocimiento" (Morf, 1994, p. 33). Morf comentó que 'las oportunidades de fundar una teoría de la instrucción sobre modelos epistemológicos puramente estructurales son dudosos'. Ciertamente, mientras que un psicólogo estaría contento con el enunciado de que un niño ha desarrollado ciertos instrumentos de conocimiento, tal como las operaciones (reversibles), y se considera, por tanto, preparado para afrontar tales y cuales problemas matemáticos, una preocupación del profesor es asegurar que el niño de hecho gana la experiencia de resolver estos problemas matemáticos.

Morf (1994) postuló que el objeto de estudio de una teoría de la instrucción es el conocimiento y su funcionamiento 'en un sujeto arbitrario'. Como la epistemología, la teoría didáctica debería poner a un lado al sujeto psicológico. Considerando, naturalmente, que 'el conocimiento depende de un sistema cognitivo que puede ser un sujeto individual, un grupo, una cultura, o cualquier sistema que pueda asignar un significado a un objeto o un suceso', la teoría debería no obstante postular que las características específicas de este sistema no deberían intervenir en la descripción del conocimiento.

El conocimiento, con relación a una teoría de la instrucción, debería ser considerado como 'un potencial de acción desarrollado por medio de la experiencia'. La orientación de una epistemología puede ser descriptiva; una teoría de la instrucción debe ser dirigida a la acción, o didáctica. En lugar de construir teorías basadas sobre hipótesis y verificación de hipótesis, la pedagogía crea teorías basadas en principios, y la elaboración de intervenciones didácticas que acople la transformación espontánea del conocimiento y garantice una sinergia entre la acción del profesor y el funcionamiento del potencial de acción en los estudiantes.

Tanto si aceptamos como si los postulados de Morf (1994), es imposible ignorar el hecho de que las teorías de la instrucción son, o se espera que sean, tanto teorías de la acción y teorías para la acción, y por tanto es probable que se basen en principios en lugar de en axiomas. Teniendo que tener en cuenta fenómenos de naturaleza muy diversa, es probable que estos principios se apoyen no sobre un único sistema coherente de hipótesis epistemológicas sino que posiblemente lo hagan sobre un conjunto de ellos aplicados a contextos diferentes. Bartolini-Bussi (1994) aceptó esta visión cuando habló de la inevitable necesidad de usar múltiples perspectivas teóricas en cualquier investigación en educación matemática cuyo propósito sea la acción y no solo el conocimiento. El resultado no es eclecticismo: prefirió evocar complementariedad. Bartolini-Bussi (1994) proporciona ejemplos de diferentes situaciones de clase que probablemente no deberían ser analizadas desde la misma base epistemológica; algunas serían mejor explicadas desde una perspectiva Piagetiana, y otras, desde una perspectiva Vygotskiana.

Cooney (1994) no dudó en hablar sobre eclecticismo en teorías de la educación matemática. De hecho, propuso considerar la teoría de tal modo que permitiera a uno hablar de 'teoría ecléctica' sin cometer una contradicción.

> Aunque estemos dispuestos a usar la palabra teoría al discutir cuestiones en educación matemática, seríamos juiciosos si consideramos la teoría como algo distinto a un concepto monolítico anclado en una noción de objetividad definida por un sentido de la realidad. Snow ... mantiene que la teoría tiene muchas formas, que van desde un conjunto bien definido de proposiciones como sugiere la ciencia 'tradicional', a análisis conceptuales, incluyendo a las metáforas que reflejan e influyen nuestro pensamiento. Dada la naturaleza de nuestro campo, es difícil imaginar que la teoría en educación matemática sea probable que dé lugar a un conjunto interdependiente de proposiciones. De hecho, podría ser acertado conceptualizar el desarrollo de la teoría como un ejercicio que revela la ingenuidad humana, el insight y la compasión de la que habla Feyerabend (p. 105).

El interés por el problema de lo que constituye una teoría en educación matemática tiene unos orígenes recientes, y no se reparte de igual manera en la comunidad internacional de educación matemática. En muchos países o grupos de educadores matemáticos, una 'teoría de la instrucción' es todavía un conjunto de principios que están influidos por valores, e implican recomendaciones para la acción.

Según algunos especialistas en educación el marco teórico del interaccionismo, junto con su orientación metodológica etnográfica podría ser un punto de encuentro favorable entre el investigador y el profesor. Este es el lugar donde las actividades del investigador y el profesor podrían complementarse de manera provechosa. Como ha argumentado Kawecki (1993), los investigadores etnográficos y los profesores investigan y se preparan para lo que van a realizar, analizan y organizan, y presentan los resultados de su trabajo en la forma de un comentario sobre ciertos aspectos de la vida humana. Ambos hacen presentaciones de sus actividades por medio de 'narraciones de una historia' (Woods, 1986, 1992; Cooney, 1994, p. 105). El profesor describe su propia experiencia, y el etnógrafo intenta describir la enseñanza y el proceso de aprendizaje desde el punto de vista de los participantes de estos procesos. Tanto la práctica profesional de la enseñanza como la investigación etnográfica se consideran que tiene características tales como 'estilo', 'insight', y 'sensibilidad', que son características más propias de un arte que del método científico ortodoxo.

CONCLUSION

Nuestra tarea fue escribir un capítulo titulado 'Epistemologías de las matemáticas y de la educación matemática'. El segundo 'de' fue bastante enrevesado (puzzling) y estuvimos algún tiempo pensando sobre qué tipo de trabajo tendríamos que hacer con el fin de afrontar la segunda parte del título de manera seria. ¿Deberíamos estudiar los orígenes de la validez de nuestras creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas? ¿Deberíamos estudiar la génesis psicológica e histórica de estas creencias? ¿Deberíamos discutir los métodos de justificación de los enunciados sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas?

No nos sentimos dispuestos a estudiar la genética y la epistemología metodológica de la educación matemática. Decidimos, por tanto, adoptar una 'visión interna', desde dentro de la educación matemática, y no desde un meta-nivel de las metodologías y sociologías de la investigación en educación matemática. Razonamos que si adoptábamos la aproximación del meta-nivel, sería muy difícil para nosotros hacer un vínculo entre lo que escribimos y el estudio de las matemáticas, que fue la primera de la tarea. Terminaríamos con dos estudios no paralelos, sin intersección común. Por tanto, nuestra interpretación del título fue: 'Epistemologías de las matemáticas y su papel en la educación matemática'.

Como hemos visto, las epistemologías de las matemáticas pueden encontrar su camino a la educación matemática sólo vía las epistemologías genética, social y cultural, histórico-crítica. Además, se ha puesto de manifiesto a lo largo de los años, que las epistemologías no se trasladan directamente a las teorías de la instrucción y no hacen recomendaciones para la práctica de la enseñanza. Estudios del proceso de aprendizaje, la elaboración de teorías del aprendizaje han sido siempre muy valiosas, pero hay necesidad de crear teorías originales de la instrucción matemática y teorías originales de la práctica de la enseñanza de las matemáticas. Ya existe un cuerpo no despreciable de investigación en esta dirección y se ha hecho un esfuerzo para explicitar las hipótesis epistemológicas subyacentes a las teorías de la instrucción y a las teorías del conocimiento profesional de los profesores que se han elaborado.

Es útil ser más conscientes de qué epistemologías se pueden o no hacer. Algunas epistemologías se preguntan: ¿Qué significa instruir a un niño? Ciertamente, el interaccionismo lo hace, por ejemplo, pero por él mismo, no define lo que es una buena instrucción. No hay tal cosa como 'una clase de matemáticas interaccionista' como hay 'una clase de matemáticas constructivista' (Burton, 1993). Si el interaccionismo tiene algunas implicaciones para la enseñanza es en la forma de una concienciación de que formatos de interacción diferentes producen diferentes tipos de conocimiento. La elección del tipo de conocimiento que nosotros, como educadores, deseamos que nuestros estudiantes logren, es un asunto de valores ideológicos, no de teoría de aprendizaje. Por otra parte, el acoplamiento de un formato de interacción con el tipo de conocimiento preferido es un asunto de estudio y experimentación. Una aproximación Vygotskiana, sin embargo, convierten la enseñanza y el aprendizaje en una actividad unificada.

Existe mucho debate dentro de la comunidad internacional de educadores matemáticos sobre las aproximaciones teóricas y sus problemas epistemológicos subyacentes. Se comparan las posiciones constructivistas, socio-históricas e interaccionistas, se confrontan unas con otras o se consideran como puntos de vista complementarios en discusiones que van mas allá de la preocupación inmediata de la enseñanza y el aprendizaje matemático. ¿Son esenciales estas consideraciones filosóficas y teóricas para marcar direcciones para una investigación valiosa en educación matemática y para hacer recomendaciones para la práctica de la enseñanza?.

Los investigadores tienden a responder afirmativamente a esta cuestión. La clarificación de los supuestos teóricos es esencial para establecer los medios de justificación, control y evaluación de las propuestas didácticas. Por otra parte, la administración educativa, diseñadores de currículos y los autores de libros de texto parecen apoyarse en su trabajo en principios generalmente implícitos, mas bien que sobre alguna teoría de la instrucción coherente construido sobre supuestos epistemológicos definidos.

Algunos educadores matemáticos han visto un peligro en esto. Tietze (1994), por ejemplo, comentó el peligro de que los principios se tienda a interpretar de una manera exagerada y simplificada. Por ejemplo, el principio de aislar las dificultades resultó en un una desintegración del contenido: la matemática aparecía como una colección de tópicos separados caracterizada mediante sus ' ejercicios típicos'. Otro 'principio' que se escucha con frecuencia, la necesidad de hacer un uso amplio de una variedad de representaciones visuales, no se apoya fácilmente con el hecho ahora bien conocido de que los significados de los diagramas y gráficos no son transparentes y que el 'lenguaje icónico puede causar dificultades adicionales considerables en la comprensión' (Tietze, 1994). Desde el punto de vista de Tietze, 'el principal problema con los principios didácticos es la falta de un análisis apropiado de sus componentes descriptivos y prescriptivos, que con frecuencia están mezclados'. Lo mismo se puede decir de poner (setting) los conceptos matemáticos en los contextos de la 'vida real'.

Separando las partes descriptivas y las recomendaciones para la acción se puede ciertamente ayudar a evitar ciertas prácticas indeseadas. Pero parece que incluso una visión más clara del valor y de las posibles consecuencias de tales principios se puede obtener si tal análisis es apoyado por un estudio de las hipótesis epistemológicas subyacentes.

La educación matemática es indudablemente un discurso académico en desarrollo con derecho propio, pero está afectada por las 'disciplinas contribuyentes' que le rodean, que Higginson (1980) lista como las matemáticas, filosofía, psicología y sociología. En nuestra investigación de las epistemología de las matemáticas y de la educación matemática hemos estado principalmente preocupados con los modos en que usamos en educación matemática el término 'epistemología', o en que nos apoyamos implícitamente sobre supuestos epistemológicos, y hemos mirado fuera de ella. Hemos examinado epistemologías del conocimiento matemático; hemos examinado lo que podría llamarse epistemología de la psicología, al menos en el sentido que para la psicología el tema central es el sujeto epistémico y cómo éste llega a conocer; y hemos examinado la manera en que los sociólogos pueden afrontar el término 'epistemología'. Quizás uno de los principales resultados de este capítulo es que, para los educadores matemáticos, las epistemologías de las matemáticas y las hipótesis sobre el sujeto epistémico no se pueden divorciar. Para algunos de ellos son lo mismos.

La clase de matemáticas es una creación institucional social y hemos tenidos dificultades en señalar que el paso de cualquier tipo de descripción epistemológica, sea del cuerpo del conocimiento matemático que ocupa muchos estantes de libros en una librería o sea el conocimiento de cualquier individuo, a prescripciones sobre la enseñanza necesariamente provoca el debate sobre creencias y valores. Estas creencias pueden ser sobre lo que los estudiantes deberían aprender, qué tipo de relaciones sociales deberían experimentar o qué formas de organización de la clase y estilos de enseñanza capacitarán mejor a los estudiantes para construir/ apropiar/ ganar ese conocimiento matemático, o aquellos modos matemáticos de pensar.

Por tanto, nociones tales como 'desarrollo', 'jerarquía', 'crecimiento', 'construcción rica', 'funciones mentales superiores' todas implican necesariamente un sentido del niño normal y por tanto del anormal, o desviado de la norma. No se pueden evitar tales discursos en educación, que son inevitablemente represivos. Deseariamos argumentar que un compromiso explícito con las hipótesis epistemológicas subyacentes de la educación, de las matemáticas, la enseñanza, el aprendizaje y el niño es un requisito ético del investigador, del profesor y los demás implicados en la educación. 'El poder y el conocimiento se implican directamente uno a otro ... No hay ninguna relación de poder sin la constitución correlativa de un campo de conocimiento, ni ningún conocimiento que no presuponga y constituya al mismo tiempo relaciones de poder' (M. Foucault, citado en Sheridan, 1980).

RECONOCIMIENTO:

La redacción de este artículo ha sido subvencionada por la ayuda nº 410-93-0700 del Canadian Social Sciences and Humanities Research Council. Deseamos reconocer también la asistencia de Michelle Artigue, quien contribuyó con alguna de las ideas , y de Mariolina Bartolini Bussi, Alan Bishop y Astrid Defence por sus comentarios a un primer borrador. La responsabilidad de las ideas en esta versión final, es sin embargo enteramente nuestra.

REFERENCES

Agassi, J.: 1982, ‘Mathematics Education as Training for Freedom’, *For The Learning of Mathematics* 1(1), 28-32.
Anglin, W.S.: 1995, *The Invisible Art: An Introduction to the Philosophy of Mathernatics,* unpublished manuscript, Concordia University, Montréal.
Arsac, G.: 1992, ‘The Evolution of a Theory in Didactics: The Example of Didactic Transposition’, in R. Douady and A. Mercier (eds.), *Research in Didactique of Matemamatics. Selected Papers,* La Pensée Sauvage éditions, Grenoble.
Artigue, M.: 1991, ‘Epistémologie et Didactique’. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10 (2-3), 241-286.
Artigue, M.: 1995, ‘Epistemology and Mathematics Education’, paper presented at the Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group, London, Ontario, May 26- 30.
Artigue, M., Oras, R., Laborde, C., Tavignot, P. (eds.): 1994, *Vingt Ans de Didactique des Mathématiques en France. Homrnage ti Guy Brousseau et Gérard Vergnaud.* La Pensée Sauvage éditions, Grenoble.
Bachelard, G.: 1938, *La Formation de1 Esprit Scientifique,* Presses Universitaires de France, Paris.
Balacheff, N.: 1990a, ‘Towards a Problématique for Research on Mathematics Teaching’, *Journal for Research in Mathematics Education* 21(4), 258-72.
Balacheff, N.: 1990b, ‘Beyond a Psychological Approach: The Psychology of Mathematics Education’, *For the Learning of Mathematics 10* (3), 2-8.
Bartolini-Bussi, M.-G.: 1994, ‘Theoretical and Empirical Approaches to Classroom Interaction’, in R. Biehler, R.W. Scholz, R. Sträser, and B. Winkelman (eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
Bartoni-Bussi, M. G. and Pergola, M.: (in press), ‘History in the Mathematics Classroom: Linkages and Kinematic Geometry’, in H. N. Janhke, N. Knoche and M. Otte (eds.), *Geschichte der Mathematik in der Lehre,* Vandenhoeck & Ruprecht: Gottingen.
Bauersfeld, H.: 1995, “Language Games in the Mathematics Classroom: Their Function and their Effects’, in P. Cobb and H. Bauersfeld (eds.), *The Emergence of Mathematical Learning: Interaction in Classroom Cultures,* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hilldale, NJ.
Berthelot, R. and Salin, M.-H.: 1995, ‘Savoirs et Connaissances dans l’Enseignement de Géométrie’, in G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier, and A. Tiberghien (eds.), *Différents Types Savoirs et leurArticulation.* La Pensée Sauvage éditions, Grenoble.
Bishop, A.: 1988, *Mathematical Enculturation: A Cultural Perspective on Mathematics Education,* Kluwer, Dordrecht.
Bloor, D.: 1976, *Knowledge and Social lmagery,* Routledge, London.
Bloor, D.: 1983, *Wittgenstein: A Social Theory of Knowledge,* Macmillan, London.
Blumer, H.: 1969, *Symbolic Interactionism: Perspective and Method,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
Brousseau, G.: 1981, ‘Problémes de Didactique des Décimaux’, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 2(1), 37-128.
Brousseau, G.: 1986a, ‘Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques’, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 33-115.
Brousseau, G.: 1986b, *Théorisation des Phénoménes d ‘Enseignement des Mathématiques* Thése de Doctorat d’Etat dés Sciences, lJniversité de Bordeaux 1.
Bruner, J.S.: 1983, *Child’s TaIk.* Oxford University Press, London.
Bruner, J. S.: 1985, ‘The Role of Interaction Formats in Language Acquisition’, in JP. Forgas (ed.), *Language and Social Situations.* Springer-Verlag, New York.
Bruner, J. S. and Bornstein, M.H.: 1989, On Interaction’, in J.S. Bruner and M.H. Bornstein (eds.), *Interaction in Human Development,* Lawrence Erlbaum Associates Publishers Hillsdale, NJ.
Brunschwicg, L.: 1912, *Les Étapes de la Philosophie Mathématique.* F. Alcan, Paris.
Burton, L.: 1993, *The Constructivist Classroom* (video), Edith Cowan University, Perth, West em Australia.
Carnap, R.: 1928/1966, *Der Logische Aufbau der Welt,* F. Meiner, Hamburg.
Chevallard, Y.: 1985, *Transposition Didactique du Savoir Savant au Savoir Enseigné,* La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble.
Chevallard, Y.: 1990, ‘On Mathematics Education and Culture: Critical Afterthoughts’, *Educational Studies in Mathematics* 21(1), 3-28.
Chevallard, Y.: 1991, *La Transposition Didactique du Savoir Savant au Savoir Enseigné,* La Pensée Sauvage éditions, Grenoble.
Chevallard, Y.: 1992, ‘Concepts Fondamentaux de la Didactique: Perspectives Apportées par une Approche Anthropologique’, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12(1), 73-112. (There exists an English translation: 1992, ‘Fundamental Concepts in Didactics: Perspectives Provided by an Anthropological Approach’, in R. Douady and A. Mercier (eds.), *Research in Didactique of Mathematics.* Selected papers, La Pensée Sauvage éditions, Grenoble).

Cobb, P.: 1989, 'Experiential, Cognitive and Anthropological Perspectives in Mathematics Education', *For the Learning of Mathematics* 9(2), 32-43.
Cobb, P.: 1990, 'Multiple Perspectives', in L.P. Steffe and T. Wood (eds.), *Transforming Children's Mathematical Education: International Perspectives*, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale, NJ.
Cobb, P. and Bauersfeld, U. (Eds.): 1995, *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale, NJ.
Cobb, P., Perlwitz, M. And Underwood, D.: 1994, 'Construction Individuelle, Acculturation Mathématique et communauté Scolaire', in M. Larochelle and N. Bednarz (eds), C*onstructivise et Education: Revue des Sciences de 1 Education. Nurnéro Thématíque 20(l),4* 1-61.
Cobb, P. and Yackel, E.: 1995, 'Constructivist, Emergent and Sociocultural Perspectives in the Context of Developmental Research', *Proceedings of the Seventeenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* October 21-24, Columbus, Ohio, 3-29.
Confrey, J.: 1990, 'What Constructivism Implies for Teaching', in R.B. Davis, C. A. Maher, and N. Noddings (eds.), *Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics,* Journal for Research in Mathematics Education, Monograph No. 4, 107-122.
Confrey, J.: 1991, 'The Concept of Exponential Functions: A Student's Perspective', in L.P. Steffe (ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experience.* Springer-Verlag, New York.
Cooney, T.J.: 1985, 'A Beginning Teacher's View of Problem Solving', *Journal for Research in Mathematics Education* 16, 324-336.
Cooney, T.J.: 1994, 'On the Application of Science to Teacher and Teacher Education', in R. Biehler, R.W. Scholz, R. Sträser and B. Winkelman (eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
Cornu, B.: 1983, *Apprentissage de la Notion de Limite: Conceptions et Obstacles.* Thése de Doctorat présentée au Département des Mathématiques Pures de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble.
Davis, P.J. and Hersh, R.: 1980, *The Mathematical Experience,* Birkhauser, Boston.
Dawson, A.J.: 1969, *The Implications of the Work of Popper, Polya and Lakatos for a Model of Mathematics Instruction,* unpublished doctoral dissertation, University of Alberta.
Dieudonné, J.: 1992, *Mathematics — The Music of Reason,* Springer-Verlag, Berlin./Heidelberg/New York.
Dreyfus, T.: 1993, 'Didactic Design of Computer-based Learning Environments', in C. Keitel and K. Ruthven (eds.), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology,* Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
Edwards, D. and Mercer, N.: 1993, *Common Knowledge: The Development of Understanding in the Classroom,* Routledge, London and New York.
Ernest, P.: 1985, 'The Philosophy of Mathematics and Mathematics Education', *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology* 16(5), 603-612.
Ernest, P.: 1990, 'The Meaning of Mathematical Expressions: Does Philosophy Shed Any Light on Psychology?', *British Journal of Philosophy and Science* 41, 443-460.
Ernest, P.: 1991, *The Philosophy of Mathematics Education,* Falmer, Basingstoke.
Feyerabend, P.: 1978, 'In Defence of Aristotle: Comments on the Conditions of Content Increase', in G. Radnitzky and G. Andersson (eds.), *Progress and Rationality in Science,* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
Fischer, R.: 1988, 'Didactics, Mathematics, and Communication', *For the Learning of Mathematics* 8(2), 20-30.
Frege, G.: 1892/1952, *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege,* P. Geach and M. Black (eds.), Blaekwell, Oxford.
Freudenthal, H.: 1986, 'Review of Y. Chevallard, *Transposition Didactique du Savoir Savant au SavoirEnseigné,* La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble, 1985', *Educational Studies in Mathematics 17.* 323-327.
Garnier C., Bednarz N. and Ulanovskaya 1. (eds): 1991, *Aprés Vygotski et Piaget: Perspectives Sociale et Constructiviste. Ecoles russe et occidentale,* Bruxelles: De Boeck - Wesmael.
Garfinkel, H.: 1967, *Studies in Ethnomethodology.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
Gergen, K. J.: 1995, 'Social Construction and the Educational Process', in L. P. Steffe and J.
Gale (eds.), Constructivism in Education, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale, NJ.
Gillies, D. (ed.): 1992, *Revolutions in Mathematics,* Clarendon, London.
Girotto, V.: 1989, 'Logique Mentale, Obstacles dans le Raisonnement Naturel et Schémas Pragramatiques', in N. Bednarz and C. Grenier (eds.), *Construction des Savoirs, Obstacles et Conflits,* C.I.R.A.D.E., Agence d'Arc Inc. (les éditions), Ottawa, Ontario.
Goffman, E.: 1959, *The Presentation of Self in Everyday Life,* Doubleday, New York.
Goffman, E.: 1974, *Frame Analysis: An Essay on the Organisation of Experience,* Harvard University Press, Cambridge, Massachussetts.
Grabiner J.: 1986, 'Is Mathematical Truth Tirne-Dependent?' in T. Tymoczko (ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics.* Birkhauser, Boston.

Gray, J.J. and Rowe, D.E.: 1993, 'Felix Klein at Evanston: Learning, Teaching and Doing Mathernatics in 1893', *For the Learning of Mathematics* 13(3), 31-36.
Hersh, R.: 1979, 'Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics', *Advances in Mathematics* 3 1(l), 31-50.
Higginson, W.: 1980, 'On the Foundations of Mathernatics Education', *For The Learning of Mathematics* 1(2), 3-7.
Kawecki, I.: 1993, *Etnografia i Szkola,* Wydawnictwo Panstwowej Wyzszej Szkoly Sztuk Plastycznyeh w Lodzi, Lodz.
Keitel, C. (cd.): 1989, *Mathematics Education and Society,* UNESCO Document Series No. 35.
Kilpatrick, J.: 1987, 'What Constructivisrn Might Be in Mathematics Education', *Proceedings of the Eleventh Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 1, 3-27.
Kitcher, P.: 1988, 'Mathematical Naturalism', in W. Aspray and P. Kitcher(eds.), *History and Philosophy of Modern Mathematics.* Minnesota Studies in the Philosophy of Science, Volume XI, University of Minnesota Press, Minneapolis.
Krummheuer, G.: 1992, 'Formats of Argumentation in the Mathernaties Classroom', paper presented at the Sixth International Congress of Mathematics Education, Québec.
Krurnmheuer, G.: 1995, 'The Ethnography of Argumentation', in P. Cobb and H. Bauersfeld (eds.), *The Emergence of Mathematical Meaning, Interaction in Classroom Cultures.* Lawence Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale, NJ.
Kuhn, T.S.: 1962, 'The Structure of Scientic Revolutions', *in The International Encyclopedia of Unified Science* 11(2), The University of Chicago Press, Chicago.
Laborde, C.: 1989, 'Audacity and Reason: French Research in Mathernatics Education', *For the Learning of Mathematics* 9(3), 31-36.
Lacan, J.: 1966, *Ecrits 1,* Seuil, Paris.
Lakatos, I.: 1976, *Proofs and Refutations.* Cambridge University Press, Cambridge.
Lakatos, I.: 1978, 'A Renaissancc of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics', in J. Worrall and O. Currie (eds.), *Mathematics, Science and Epistemology,* Cambridge University Press, London/New York.
Largeault, J.: 1994, 'Compte Rendu du Livre de Janet Folina, Poincaré and the Philosophy of Mathematics, Macmillan, London, 1992'. *Archives de Philosophie* 57(4), 717-719.
Lave, J.: 1988, *Cognition in Practice: Mind, Mathematics and Culture in Everyday,* Cambridge University Press, Cambridge.
Lave, J. and Wenger, E.: 1991, *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation,* Cambridge University Press, Cambridge.
Leont'ev, A.N.: 1981, 'The Problem of Activity in Psychology', in J.V. Wertsch (ed.), *The Concept of Activity in Soviet Psychology,* Sharpe, Arrnonk, New York.
Lerman, S.: 1983, 'Problem-Solving or Knowledg-Centred: The Influence of Philosophy on Mathematics Teaching', *International Journal of Mathematical Education in Science nad Technology,* 14 (1), 59-66.
Lerrnan, S.: 1986, *Alternative Víews of the Nature of Mathematics and their Possible Influence on the Teaching of Mathematics,* unpublished doctoral dissertation, University of London.
Lerman, S. (ed.): 1994, *Cultural Perspectives On the Mathematics Classroom,* Kluwer, Dordrecht.
Lemman, S.: 1996, 'Intersubjectivity in Mathematics Learning: A Challenge to the Radical Constructivist Paradigm? ' *Journal for Research in Mathematcs Education* 27(2), 133-150.
Lesh, R. and Kelly, A.E.: 1994, 'Action-theoretic and Phenomenological Approaches to Research in Mathematics Education: Studies of Continually Developing Experts', in R. Bichler, R.W. Scholz, R. Sträser, and B. Winkelman (eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
Lins, R.: 1994, 'Eliciting the Meanings for Algebra Produced by Students: Knowledge, Justification and Semantic Fields', in J.P. da Ponte and J F. Matos (eds.), *Proceedings of the Eighteenth Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Educanon,* Lisbon, vol. 3, 184-191.
Lompscher, J.: 1994, 'The Sociohistorical School and the Acquisition of Mathematics', in R. Biehler, R.W. Scholz, R. Sträser, and B. Winkelrnan (eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
Martinand, J.L.: 1989, 'Pratiques de Référence, Transposition Didactique et Savoirs Professionnels en Sciences et Techniques', *Les Sciences de l' Education* 2, 23-29.
Mason, J., Burton, L. and Stacey, K.: 1984, *Thinking Mathematically.* Addison Wesley, London.
Maturana, H.R.: 1978, 'Biology of Language: The Epistemology of Reality', in G.A. Miller and E. Lennenberg (eds.), *Psychology and Biologv of Language and Thought: Essays in Honour of Eric Lannenbers,* Academic Press, New York, 27-63.
Mead, G.H.: 1934, *Mind, Self and Society,* University of Chicago Press, Chicago.
Merttens, R.: 1995, 'Teaching not Learning: Listening to Parents and Empowering Students', *For the Learning of Mathematics* 15(3), 2-9.
Monteiro, B.: 1993, *Factors Affecting Mathematics Teachers Use of Computers and Software in Secondary Schools,*

unpublished doctoral dissertation, University of Oxford.
Moreira, C.: 1992, *Primary Teachers' Attitudes Towards Mathematics and Mathematics Teaching with Special Reference to a Logo-Based In-Service Course,* unpublished doctoral dissertation, University of London Institute of Education.
Morf, A.: 1994, 'Une Epistémologie pour la Didactique: Spéculations Autour d'un Aménagement Conceptuel', *Revue des Sciences d' Education* 20(1), 29-40.
Nickson, M.: 1981, *Social Foundations of the Mathematics Curriculum.* unpublished doctoral dissertation, University of London Institute of Education.
Nickson, M.: 1992, 'The Culture of the Mathematics Classroom: An Unknown Quantity?', in D. Grouws (cd.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* Macmillan, New York, 101-1 14.
Nickson, M. and Lerman, S. (eds.): 1992, *The Social Context of Mathematics Education: Theory and Practice,* South Bank Press, London.
Perrin-Glorian, M.-J.: 1994, 'Théorie des Situations Didactiques: Naissance, Développement, Perspectives', in M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, and P. Tavignot (eds.), *Vingt Ans de Didactique des Mathématiques en France,* La Pensée Sauvage éditions, Grenoble.
Piaget, J. and Garcia, R.: 1989, *Psychogenesis and the History of Science.* Columbia University Press, New York.
Piaget, J.: 1959, *The Language and the Thought of the Child,* Routledge and Kegan Paul Ltd, London.
Piaget, J.: 1970, *Structuralism,* Basic Books, Inc., New York.
Piaget, J.: 1972, *Science of Education and the Psychology of the Child.* The Viking Press, New York.
Piatelli-Palmarini, M. (ed.): 1979, *Théories du Langage, Théories del'Aprentissage, Le Débat Entre Jean Piaget et Noam Chomsky*, Editions du Seuil, Paris.
Poincaré, H.: 1899, 'La Logique et l'lntuition dans la Science Mathématique', *Enseignement Mathématique* 1, 157-162.
Poincaré, H.: 1906, *La Science et l'Hypotése.* Flammarion, Paris.
Poincaré, H.: l908a, 'L'Invention Mathématiquc', *Enseígnement Marhématique* lO, 357-37
Poincaré, U.: l908b, *Science et Méthode.* Flamarion, Paris.
Polya, G.: 1945, *How To Solve It* (second edition), Doubleday Anchor, New York.
Popper, K.R.: 1972, *La Connaissance Objective.* Editions Complexe, Bruxelles.
Reichenbach, H.: 1938/1947, *Experience and Prediction: An Analysis of the Foundations of the Structure of Knowledge.* University of Chicago Press, Chicago.
Restivo, S.: 1985, *The Social Relations of Physics, Mysticism and Mathematics,* Reidel, Dodrecht.
Restivo, S.: 1992, *Mathematics in Society and History.* Kluwer, Dordrecht.
Richard, J.: 1907, 'Sur la Nature des Axiomes en Géométrie', *L'Enseignement Mathématique* 9, 463-47 3.
Rogers, L.: 1978, 'The Philosophy of Mathematics and the Methodology of Teaching Mathematics', *Analysen* 2, 63-67.
Russell, B.: 1989, *PrincipIes of Mathematics.* Norton, New York.
Schneider-Gilot, M.: 1988, *Des Objets Mentaux 'Aire' et 'Volume' au Calcul des Primitives.* Dissertation présentée en vue de l'obtention du grade de Docteur dés Sciences, Université Catholique de Louvain, Faculté des Sciences, Louvain-la-Neuve.
Schoenfeld, A.H.: 1985, *Mathemarical Problem Solving.* Academic Press, London.
Seeger, E.: 1994, 'Capturing Regularities and the Theory of Practice' in L. Bazzini (ed.), *Proceedings of the Fifth International Conference On Systematic Cooperation Between Theory and Practice in Mathematics Education,* Grado, Italy, 211 -220.
Sfard, A.: 1991, 'Qn the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin', *Educational Studies in Mathematics* 22(1), 1-36.
Sfard, A.: 1994, 'Mathematical Practices, Anomalies, and Classroom Communication Problems', in P. Ernest (ed.), *Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematics Education,* The Falmer Press, London.
Sheridan, A.: 1980, *Foucault: The Will to Truth,* Tavistock, London.
Sierpinska, A.: 1985a, 'La Notion d'Obstacle Épistémologique dans l'Enseignernent des Mathématiques', *Actes de la 37e Rencontre de la C.I.E.A.E.M.*, 73-95.
Sierpinska, A.: l985b:, 'Obstacles Épistémologiques Relatifs á la Notion de Limite', *Recherches en Didactique des Mathématiques 6(1),* 5-68.
Sierpinska, A.: 1990: 'Some Remarks on Understanding in Mathematics', *For the Learning of Mathematics* 10(3), 24-36.
Sierpinska, A.: 1994, *Understanding in Mathematics,* The Falmer Prcss, London.
Sierpinska, A.: 1995, 'Some Reflections on the Phenomenon of French Didactique', *Journal für Mathematik Didaktik* 16(3/4), 163-192.
Sierpinska, A., Defence, A., Khatcherian, T., Saldanha, L.: in press, 'A Propos de Trois Modes de Raisonnement en Algébre Linéaire', to appear in J.-L. Dorier (ed.), *Etat de l'Art de la Recherche Ínternationale sur 1*

‘*Enseignement Univer itaire en Algébre Linéaire,* La Pensée Sauvage éditions, Grenoble.
Simon, M.A.: 1995, ‘Reconstructing Mathematical Pedagogy from a Constructivist Perspective’, *Journal for Research in Mathematics Education* 26(2), 114-145.
Steffe, L.P.: 1992, ‘Schemes of Action and Operation Involving Composite Units’, *Learning and Individual Differences* 4, 259-309.
Steffe, L. P. and D’Ambrosio, B.: 1995, ‘Toward a working Model of Constructivist Teaching’, *Journal for Research in Mathematics Education* 26 (2), 146-159.
Steffe, L.P. and Weigel, H: 1994, ‘Cognitive Play and Mathcmatical Learning in Computer Microworlds’, *Educational Studtes in Mathematics* 26, 111-134.
Steinbring, H.: 1989, ‘Routine and Meaning in the Mathematics Classroom’, *For the Learning of Mathematics* 9(1), 24-33.
Steinbring, H.: 199la, ‘Mathematics in Teaching Processes. The Disparity Between Teacher and Student Knowledge’, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 11(1), 65-108.
Steinbring, H.: 1991b, ‘The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology of Mathematical Knowledge’, *Educational Studies in Mathemanics* 22, 503-522.
Steinbring, H.: 1993, ‘Problems in the Development of Mathematical Knowledge in the Classroom: The Case of a Calculus Lesson’, *For the Learning of Mathematics* 13(3), 37-50.
Steinbring, H.: 1994, ‘Dialogue between Theory and Practice in Mathematics Education’, in R. Biehler, R.W. Scholz, R. Sträser, and B. Winkelman (eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
Strawson, P.F.: 1971, ‘Meaning and Truth’, in P.F. Strawson (cd.), *Logico-Linguistic Papers,* Methuen, London.
Thomas, R.S.D.: 1987, ‘Cartesian and non-Cartesian Thinking: Reflections on the Learning in Mathematics’, *For the Learning of Mathematics* 7(1), 23-29.
Thompson, A.G.: 1982, *Teachers’ Conceptions of Mathematics: Three Case Studies,* unpublished doctoral dissertation, University of Georgia, Athens, USA.
Tietze, U.-P.: 1994, ‘Mathematical Curricula and the Underlying Goals’, in R. Biehler, R.W. Scholz, R. Sträser, and B. Winkelrnan (eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
Vergnaud, G.: 1991, ‘La Théorie des Charnps Conceptuels’. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10/2.3, 133-1 70.
Voigt, J.: 1995, ‘Thematic Patterns of Interaction and Sociomathematical Norrns’, in P. Cobb and H. Bauersfeld (eds.), *The Emergence of Mathematical Meaning. Interaction in Classroom Cultures.* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale, NJ.
von Glasersfeld, E.: 1990. Environment and Communication’, in LP. Steffe and T. Wood (eds.), *Transforming Children‘s Mathematics Education: International Perspectives.* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale, NJ, 30-38.
von Glasersfeld, E.: 1993, ‘Learning and Adaptation in the Theory of Constructivism’, *Communication and Cognition* 26(3/4), 393-402.
von Glasersfeld, E.: 1995: ‘A Constructivist Approach to Teaching’, in L.P. Steffe and J. Gale (eds.), *Constructivism in Education,* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ.
Vygotsky, L.: 1978, *Mmd ma Societv.* Harvard University Press: Cambridge, MA.
Walkerdine, V.: 1988. *The Mastery of Reason: Cognitive Development and the Production of Rationality.* Routledge, London and New York.
Wittgenstein. L.: 1953, *Philosophical investigations.* Basil Blackwell, Oxford.
Wittgenstein, L.: 1956, *Remarks on the Foundations o fMathematics.* Basil Blackwell, Oxford.
Wittgenstein, L.: 1974, *Tractatus Logico-Philosophicus.* Routledge and Kegan Paul, London.
Wood, T.: 1992, ‘Funneling or Focusing? Alternative Patterns of Communication in Mathematics Class’, paper presented at the Sixth International Congress of Mathematics Education, Québec.
Woods, P.: 1986, *Inside Schools: Ethnography in Educational Research*, Routledge and Kegan Paul, London.
Woods, P.: 1992, Symbolic lnteractionism: Theory and Method’, in M.D. LeCompte, W.L.
Millroy, 1. Preissle (eds.), *The Handbook of Qualitative Research in Education,* Academic Press, San Diego.
Yackel, E., Cobb, P. and Wood, T.: 1991, ‘Small-Group Interactions as a Source of Learning Opportunities in Second-Grade Mathematics’, *Journal for Research in Mathematics Education* 22, 390-408.