

Capítulo 4

RECURSOS PARA EL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS

A: Contextualización

REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN SOBRE LOS RECURSOS DIDÁCTICOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Consigna:

A continuación se presenta un extracto de un documento sobre el uso de recursos didácticos en la enseñanza de las matemáticas en primaria.

- 1) Léelo con atención. Subraya los puntos que consideras especialmente acertados.
- 2) ¿Qué papel da a los alumnos en su proceso de aprendizaje? ¿Qué requisitos se sugieren para las situaciones didácticas a proponer en la clase de matemáticas?
- 3) ¿Por qué se destaca la importancia del material manipulativo? ¿En qué forma se sugiere su uso?
- 4) ¿Cómo debe complementar el profesor el uso del material didáctico?
- 5) Si no estás de acuerdo con alguno de los enunciados, indica tus razones.

Extracto del documento:

Para ayudar a los chicos y chicas de tercer ciclo a construir conocimientos matemáticos es preciso **combinar varios factores en una secuencia de aprendizaje:**

- * Por un lado, es importante proponerles situaciones en las que tengan un papel activo, es decir, plantearles algo que tengan que hacer, por ejemplo: distribuir cosas entre..., buscar todos los que tengan..., construir una figura que sea..., y, a ser posible, que tengan una implicación personal en la propuesta, ya sea porque corresponda a alguna situación de la vida diaria o a algunas de sus aficiones; aunque esto último no siempre resulta fácil, cuando se consigue, el interés y la significatividad de la propuesta aumentan notablemente y se obtienen mejores resultados.
- * Igualmente, es importante ofrecer material que ayude a representar la propuesta: cubos, ábacos, instrumentos de medida, cuerpos geométricos o material para construirlos, etc., es decir, algo que permita que, al pensar maneras de resolver una determinada cuestión, se pueda materializar y comprobar los resultados de una manera física. Si, por ejemplo, les proponemos que busquen distintas maneras de dividir un cuadrado en partes iguales y disponen de un cuadrado de papel, podrán doblarlo o recortarlo y comprobar así algunas de las combinaciones que se les ocurran.
- * La manipulación, siempre que sea posible, no debería ser silenciosa; debemos intentar que describan lo que están haciendo, que evoquen lo que hicieron en otro momento, motivarles con preguntas para que hagan conjeturas, expresen lo que están considerando y que lo discutan con sus compañeros. Obtendremos así varios efectos beneficiosos: uno de ellos es provocar la verbalización, cosa que influye de manera muy determinante en la clarificación de las propias ideas y en la elaboración de conceptos; otro es el establecimiento de un intercambio, una discusión entre iguales que fomenta la seguridad y la confianza en uno mismo, actitud que resulta fundamental en el aprendizaje de las matemáticas; además, en el transcurso de estas discusiones, podemos ayudar a considerar el error no como un fracaso, sino como una forma de aproximación a la solución adecuada.

- * Es importante también ayudar a generalizar, a encontrar “la norma”, para lo cual hay que promover experiencias similares que consideren un abanico de ejemplos suficientes y representativos que sirvan de referencia, y conducir, con preguntas y ejemplos, el pensamiento de los niños hasta llegar a la conceptualización. Obtendrán así una definición o una norma que, por ser elaborada a partir de experiencias concretas y con la práctica y la discusión, tiene un valor totalmente distinto al de la definición que se podría haber dado a un alumno considerado receptor.
- * No hay que olvidar tampoco la importancia de la mecanización. Las matemáticas hay que comprenderlas, pero también hay que practicarlas con el fin de alcanzar un dominio que permita utilizarlas economizando esfuerzos; por lo tanto, deben proponerse también ejercicios encaminados a conseguir una automatización de determinadas habilidades.

Este planteamiento de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas contrasta con el que muchos de nosotros hemos vivido como alumnos cuando el lápiz y el papel, la tiza y la pizarra eran los únicos elementos que acompañaban la explicación del maestro; explicación que se limitaba, en muchos casos, a dar unos enunciados que se debían memorizar, que nadie podía discutir, ni siquiera comentar, y que representaban el preludio de una serie de ejercicios que hay que resolver.

Desde entonces han cambiado muchas cosas: los niños tienen libros de texto agradables y bien ilustrados y pueden, por supuesto, comentar y preguntar con mucha más libertad a su maestro, pero debemos plantearnos hasta qué punto hemos conseguido cambiar la idea de fondo y si realmente admitimos que para aprender hay que reelaborar los conocimientos en un proceso en el que es preciso tantear soluciones, comentar ideas y razonar resultados, y en el que cada cual participa a la vez de forma individual y como miembro de una colectividad. Nuestras ideas respecto a este tema imprimirán un cariz decisivo al aprendizaje que fomentemos, e influirán más, por supuesto, que el material que utilizemos.

B: Desarrollo de conocimientos

1. INTRODUCCIÓN

En las distintas propuestas de reforma del currículo matemático de las comunidades autónomas españolas, y de otros países, se sugiere el uso de materiales didácticos (generalmente de tipo manipulativo o visual) como un factor importante para mejorar la calidad de la enseñanza. El uso de recursos manipulativos como el geoplano, tangram, ábacos, material multibase, dados, fichas, etc. se presenta como "casi obligado" en los niveles primarios y secundarios. Estas propuestas vienen apoyadas por instituciones prestigiosas como el NCTM, que ha dedicado varias publicaciones a este tema. También en España los profesores se han preocupado por el tema; por ejemplo, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas organizó unas jornadas específicas sobre el tema.

Uno de los argumentos en que se apoyan estas orientaciones es que se supone que los materiales manipulativos ayudan a los niños a comprender tanto el significado de las ideas matemáticas como las aplicaciones de estas ideas a situaciones del mundo real. Sin embargo, es necesario profundizar sobre el sentido, fundamento y problemática que plantea a los profesores y a los investigadores en didáctica de las matemáticas el uso de materiales "manipulativos" en el estudio de las matemáticas.

Este capítulo tiene dos objetivos principales:

- Proporcionar al profesor en formación un marco conceptual que le ayude a tomar una posición crítica y constructiva sobre el uso de los recursos didácticos, y en particular los materiales manipulativos, en la enseñanza de las matemáticas.
- Hacerle reflexionar sobre la complejidad del uso de los materiales concretos debido a las relaciones nada simples que existen entre los materiales, las situaciones didácticas y los diversos lenguajes utilizados en la construcción de los conceptos y estructuras matemáticas.

2. RECURSOS DIDÁCTICOS

Son muchos los posibles recursos didácticos que podemos usar en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.



Ejemplos

- Los propios libros de texto, cuadernos de ejercicio, pizarra, lápiz, papel e instrumentos de dibujo o la calculadora que usamos habitualmente en clase son recursos didácticos, puesto que ayudan al alumno en su aprendizaje y al profesor en la enseñanza.
- Cuando se enseña a los niños a contar, se puede usar como recurso los propios dedos de las manos, piedrecillas, regletas Cuisenaire, material multibase, etc.
- Juegos habituales, tales como la oca, parchís, ruleta, dominó, dados, cartas, pueden ayudar a los niños a comprender la idea de azar y probabilidad.

- Recursos didácticos más sofisticados incluyen los documentales grabados en vídeo sobre aspectos concretos de las matemáticas, los programas didácticos de ordenador y recientemente los recursos en Internet.

Para comprender mejor la importancia de los recursos o material didáctico, se usan diferentes clasificaciones de los mismos. Una de ella consiste en diferenciar dos tipos de recursos:

- *Ayudas al estudio*: recursos que asumen parte de la función del profesor (organizando los contenidos, presentando problemas, ejercicios o conceptos). Un ejemplo lo constituyen las pruebas de autoevaluación o los programas tutoriales de ordenador, etc. También se incluyen aquí los libros de texto, libros de ejercicios, etc.
- *Materiales manipulativos que apoyan y potencian el razonamiento matemático*: Objetos físicos tomados del entorno o específicamente preparados, así como gráficos, palabras específicas, sistemas de signos etc., que funcionan como medios de expresión, exploración y cálculo en el trabajo matemático.

<p>1. ¿Qué tipos de recursos usas o has usado personalmente en el estudio de las matemáticas? ¿Cuáles te han sido más útiles?</p> <p>2. En la década de los 80 estuvo en auge el lenguaje de ordenador LOGO. En este lenguaje los niños pueden dar órdenes a una "tortuga" que se desplaza por la pantalla del ordenador y "conoce", entre otras, las órdenes avanza (AV) gira derecha (GD), gira izquierda (GI) y REPITE. Además se puede enseñar a la tortuga nuevas palabras mediante el comando PARA.</p> <p>Una vez aprendidas nuevas palabras, se puede dar órdenes a la tortuga utilizándolas. Como ejemplo, mostramos las instrucciones para enseñar a la tortuga las palabras cuadrado y bandera.</p> <p>a. ¿Clasificarías el lenguaje LOGO de ayuda al estudio o de instrumento semiótico?</p> <p>b. ¿Qué complemento sería necesario para que el lenguaje LOGO cumpliera ambas funciones?</p> <p>c. Busca algunos libros sobre lenguaje LOGO y analiza qué parte o partes de las matemáticas pueden beneficiarse del uso de este recurso.</p>			
<p>PARA CUADRADO REPITE 4 AV 50 GD 90</p>		<p>PARA BANDERA AV 50 CUADRADO</p>	

3. AYUDAS AL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS

3.1. Los libros de texto y apuntes

El recurso didáctico más común en la enseñanza de cualquier tema es el libro de texto. Por ello es importante tener un criterio para elegir los que se han de recomendar a los alumnos. El libro de texto "conserva y transmite" de alguna forma el conocimiento matemático, puesto que el alumno lo usa como referencia, cuando tiene que resolver un problema o recordar una definición o propiedad.

Hay que tener en cuenta además que las matemáticas que se presentan en un libro destinado a los niños son muy diferentes de las matemáticas que usan los matemáticos (por ejemplo, la que encontramos en un texto universitario). En el capítulo 1 ya hemos comentado que en didáctica se habla de *transposición didáctica* para referirse al cambio que el conocimiento matemático sufre para ser adaptado como objeto de enseñanza. La transposición didáctica es necesaria porque:

- Hay que seleccionar y secuenciar las partes de las matemáticas que se van a enseñar a los alumnos de un cierto nivel escolar.
- Hay que adaptarlas para hacerlas comprensibles a los niños; para ello se requiere prescindir de la formalización y usar un lenguaje comprensible para ellos.
- Hay que buscar ejemplos, problemas y situaciones que interesen a los niños y que permitan a los alumnos apropiarse de los conocimientos pretendidos.

3. Compara la presentación de los números naturales en tu texto de matemáticas (por ejemplo, en el capítulo 1 de este Manual) con la que se hace en los libros de texto de primer a tercer curso de primaria. ¿Qué diferencias observas? ¿Cómo se ha secuenciado el tema para hacerlo asequible a los alumnos? ¿Son los ejemplos presentados a los niños los mismos que los presentados en el texto para la formación del profesor?

La importancia del libro de texto es resaltada en diversos documentos:

- En el denominado Informe Cockcroft¹ se afirma que "los libros de texto constituyen una ayuda inestimable para el profesor en el trabajo diario del aula".
- En Rico² encontramos que "El libro proporciona seguridad y continuidad en los puntos de vista, facilita la imagen de que el conocimiento es algo localizado, que se puede encontrar fácilmente y con respecto al cual el único trabajo posible consiste en su asimilación. Su determinación ya está hecha, y su base fundamentalmente es "científica", apoyada por la tradición y la experiencia. Como el libro supone un gran esfuerzo de síntesis, planificación, estructuración y acomodación de contenidos, por encima de la capacidad del profesor medio, se considera el paradigma del conocimiento que hay que transmitir".
- Romberg y Carpenter³ por su parte indican que "el libro de texto es visto como la autoridad del conocimiento y guía del aprendizaje. La propiedad de las matemáticas descansa en los autores del libro de texto y no en el maestro".

Quizás en estas citas hay también una advertencia velada: el profesor debe ser cuidadoso y hacer un uso crítico de los libros de texto. No todos ellos son igualmente valiosos. Más allá de que la presentación sea agradable, que los ejercicios y problemas sean interesantes hay que cuidar que el contenido sea adecuado y que el significado que se presente de las matemáticas esté carente de sesgos.

¹ Cockcroft, W. H. (1985). *Las Matemáticas sí cuentan*. Madrid: MEC (p.114).

² Rico, L. (1990). Diseño curricular en Educación Matemática: Una perspectiva cultural. En S. Llinares, y V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en Educación Matemática* (pp. 17-62). Sevilla: Alfar (p.22).

³ Romberg, T. A. y Carpenter, T. P (1986). Research on teaching and learning mathematics: Two disciplines of scientific inquiry. En M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 850-869). New York: McMillan (p. 867).

Además de los libros de texto, los cuadernos de ejercicios, esquemas y apuntes de los alumnos son también herramientas importantes en el aprendizaje. Los apuntes también pueden proporcionar información al profesor sobre lo que sus alumnos aprenden.

4. Compara el tema de fracciones en dos libros de texto de primaria diferentes. ¿Cuál te parece más completo y por qué? ¿Puedes observar algún sesgo, por ejemplo, la falta de un punto importante para el aprendizaje de los alumnos?
5. Consigue unos apuntes de dos de tus amigos tomados en la clase de matemáticas y compara con los tuyos propios. ¿Puedes detectar algún punto incorrectamente comprendido? ¿Qué partes de la lección fueron recogidas por los tres estudiantes? ¿Cuáles sólo por alguno de ellos? Si tú fueras el profesor, ¿cómo podrías usar estos apuntes para mejorar tu acción docente?

3.2. Las tareas matemáticas y situaciones didácticas entendidas como recurso. Variables didácticas

Desde una perspectiva muy general podemos considerar que las tareas que se proponen en la clase de matemáticas son un recurso didáctico que puede controlar el profesor. En el capítulo 2 sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, destacamos que al resolver estas tareas el alumno dota de significado a los conceptos matemáticos y también describimos las características deseadas en las tareas matemáticas.

Estas tareas toman diversas formas en los libros de texto y en el material elaborado por el profesorado, pero los ejemplos y ejercicios son una parte importante. Una práctica común en los libros de texto es mostrar al alumno algunos ejemplos del concepto antes o después de haberlo definido y estudiado sus propiedades y luego asignarle algunos ejercicios para reforzar el aprendizaje. Esta práctica se justifica porque se supone que se gana maestría en el tema a través del trabajo con los ejercicios y de los ejemplos mostrados del concepto.

Por otra parte, el aprendizaje matemático no es consecuencia directa y exclusiva de la confrontación de los alumnos con tareas más o menos problemáticas. Los problemas matemáticos propuestos en clase formarán parte de dispositivos más generales y complejos que son las secuencias de *situaciones didácticas*. Estas secuencias de situaciones, tal como ya hemos comentado en el capítulo 2 al analizar el estudio dirigido de las matemáticas, deben contemplar no sólo los momentos de la acción/ investigación personal de los alumnos con las tareas - fase para la cual el material tangible puede desempeñar un papel importante - sino que deben diseñarse e implementarse, además, momentos de formulación /comunicación de las soluciones, justificación /discusión de las mismas, institucionalización de los conocimientos pretendidos (compaginar las técnicas, el lenguaje y los conceptos puestos en juego con la cultura matemática correspondiente).

6. Propón una lista de ejercicios sobre la multiplicación de fracciones. Inventa una situación didáctica a partir de la cual el alumno pueda llegar a comprender para qué se necesita la multiplicación de fracciones.

Variables didácticas

La resolución de problemas ha sido una de las áreas de investigación de mayor impacto en la didáctica de las matemáticas. Los investigadores interesados en entender la interacción entre el estudiante y la tarea de resolución de problemas han analizado las tareas presentadas, las características de los estudiantes, de la situación de evaluación, la enseñanza recibida y otros puntos, tratando de ver cuáles de ellos influyen tanto en el éxito del alumno al resolver el problema como en su aprendizaje.

En la bibliografía sobre resolución de problemas se suele diferenciar tres tipos principales de variables, que, en nuestra opinión, se puede extender a casi todo tipo de tarea matemática:

- *variables del problema*: en un mismo problema o tarea, ligeras variaciones en el enunciado, pueden variar su dificultad, las estrategias con que los alumnos tratan de resolverlo o bien los contenidos matemáticos de la tarea.
- *variables del sujeto*: los alumnos tienen diversas capacidades, intereses, actitud e historia. Las circunstancias sociales y familiares también pueden influir, por ejemplo, el apoyo de sus padres en el estudio o los medios que éstos le proporcionan.
- *la situación de resolución*, herramientas disponibles, si se trabaja sólo o en grupo, etc.

Interesa destacar aquellas variables cuyo control se puede considerar como un recurso del profesor, es decir sobre las que podemos actuar y que producen un cambio significativo en lo que el alumno aprende: son las llamadas *variables didácticas*. Generalmente son variables de tarea o de la situación; pero también a veces se puede actuar sobre las variables del sujeto, por ejemplo, tratando de aumentar el interés o mejorar la actitud de los alumnos.

7. Considera el siguiente ejercicio. Identifica posibles variables de tarea y escribe el enunciado de otros ejercicios similares, variando estas variables.

Juan y María juegan a lanzar dos monedas. Si salen dos caras Juan gana un euro y en otro caso María gana un euro. ¿Es equitativo el juego? ¿Cuánto tiene que ganar María para que el juego sea equitativo?

4. MATERIAL MANIPULATIVO

A continuación planteamos unas reflexiones sobre esta segunda clase de recursos didácticos, que, en realidad, constituyen los instrumentos semióticos del trabajo matemático (sea éste profesional o escolar). Nos referiremos a ellos con el nombre genérico de *manipulativos* y distinguiremos dos tipos, “manipulativos tangibles” y “manipulativos gráfico-textuales-verbales”:

- “*Manipulativos tangibles*” –que ponen en juego la percepción táctil: regletas, ábacos, piedrecillas u objetos, balanzas, compás, instrumentos de medida, etc. Es importante resaltar que los materiales tangibles también desempeñan funciones simbólicas. Por ejemplo, un niño puede usar conjuntos de piedrecillas para representar los números naturales.

Ejemplo

En Resnick y Ford⁴ se describe el caso de Leslie, una niña de 9 años que utilizaba sistemáticamente una regla defectuosa para la resta, a saber, la de restar el número menor del mayor en cada columna, sin tener en cuenta cuál era el sustraendo y cuál el minuendo. Leslie realizaba manipulaciones simbólicas con los números pero no les atribuía un significado. Estas manipulaciones simbólicas pueden ser "concretadas" de manera tangible con un material: los bloques de base diez de Dienes. Este material fue usado con Leslie para dar un significado concreto a sus manipulaciones con símbolos numéricos de la manera siguiente:

Procedimiento de práctica	Representación con bloques de Dienes	
	Decenas	Unidades
Para el problema $85 - 47$ 1. Representar el 85 con bloques.		
2. Empezar por la columna de las unidades, e intentar quitar los 7 bloques que aparecen en el sustraendo. 3. No hay suficientes bloques, por lo que hay que ir a la columna de las decenas y tomar prestada una barra de decena. 4. En el problema escrito, tachar el 8, y escribir un 7, para indicar el cambio de bloques de la columna de las decenas: $\begin{array}{r} 785 \\ -47 \\ \hline \end{array}$		
5. Cambiar la barra de decena por diez bloques de unidad, y colocarlos en la columna de unidades. 6. En el problema escrito, representar esto escribiendo un 1 que convierte el 5 en un 15: $\begin{array}{r} 715 \\ -47 \\ \hline \end{array}$		
7. Ahora, retirar el número de bloques que se indican en la columna de unidades del sustraendo. 8. Contar el número de bloques de unidades que quedan, y escribir el resultado en la columna de unidades del problema escrito. $\begin{array}{r} 715 \\ -47 \\ \hline 8 \end{array}$		
9. Ir a la columna de las decenas e intentar retirar el número de bloques que se indica en el sustraendo. 10. Dado que existen bloques suficientes, completar la operación, contar los bloques que quedan y escribir la respuesta en la columna de decenas del problema escrito: $\begin{array}{r} 715 \\ -47 \\ \hline 38 \end{array}$		

- “Manipulativos gráfico-textuales-verbales” –en los que participan la percepción visual y/o auditiva; gráficas, símbolos, tablas, etc. Es importante resaltar que este

⁴ Resnick, L. B. y Ford, W. (1991). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona: Paidós-MEC (pp. 248-252).

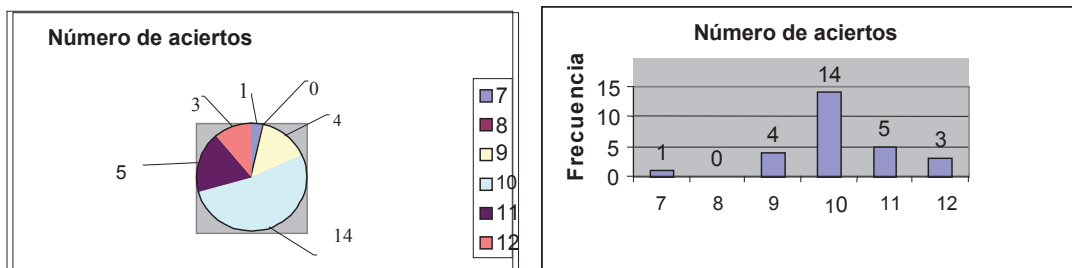
segundo tipo de objetos -gráficos, palabras, textos y símbolos matemáticos, programas de ordenador- también pueden manipularse, pues podemos actuar sobre ellos. Sirven como medio de expresión de las técnicas y conceptos matemáticos y al mismo tiempo son instrumentos del trabajo matemático.

El carácter dinámico y "manipulable" de los sistemas de signos matemáticos está siendo potenciado recientemente por el uso de las nuevas tecnologías en las distintas ramas de las matemáticas (Geometría, Cabri; Análisis de datos, Statgraphics; Cálculo, Derive; etc.)

Ejemplo

Las gráficas siguientes están realizadas con la hoja de cálculo EXCEL, disponible en la mayor parte de los ordenadores. En EXCEL u otras hojas electrónicas, los alumnos pueden introducir sus datos, realizar con ellos cálculos (lo que le obliga a pensar la fórmula correspondiente para obtener el resultado deseado) y pasar de un gráfico a otro. Cada gráfico se puede manipular de diversas formas, cambiando, por ejemplo, las escalas, rótulos, números de datos.

Cada una de estas gráficas, y el mismo listado de datos en la hoja constituye un sistema diferente de representación que visualiza distintos conceptos matemáticos. Por ejemplo, mientras el gráfico de sectores visualiza mejor la proporción que cada dato representa del total (frecuencia relativa, fracción como parte-todo) el gráfico de barras visualiza mejor la frecuencia absoluta, así como la idea de escala numérica para las frecuencias. En el caso de datos numéricos también visualiza mejor la tendencia central (moda) y dispersión).



8. La tabla 100

La tabla que reproducimos a continuación muestra una disposición de los números del 0 al 99 que se conoce como la "tabla 100"; una variante puede ser comenzar desde 1.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

- Inventa algunas tareas utilizando esta tabla que sean útiles para el aprendizaje de la serie numérica, ligadas al descubrimiento de patrones o regularidades en la disposición de los números.
- ¿Cómo se manipulan los números de la tabla para descubrir los patrones?

- c. ¿Qué objetos matemáticos se representan en la tabla? ¿Cuáles se pueden representar mientras buscamos los diferentes patrones?
- d. Construye una tabla similar para un sistema de numeración diferente (por ejemplo, en base 5). ¿Cómo se modifican ahora los patrones que habías encontrado para la tabla 100?

4.1. Funciones del material textual

Las funciones que pueden desempeñar los materiales manipulativos en la enseñanza de las matemáticas elementales se explican porque algunas teorías ampliamente aceptadas sobre el aprendizaje de las matemáticas dan un peso importante a las relaciones entre lenguaje y pensamiento y conceden, por ello, gran relevancia a los medios de expresión en la actividad y el estudio de las matemáticas.

No podemos olvidar que tanto las situaciones didácticas, problemas y tareas que proponemos a los niños como los objetos abstractos que ellos deben evocar para resolverlos (por ejemplo, la ideas de número, operación, suma, propiedad asociativa, ...) requieren del lenguaje para ser comunicadas por los niños a su profesor o compañeros, o incluso para pensar en ellas.

Ejemplo:

Los símbolos matemáticos permiten expresar cantidades, realizar operaciones, fijar procesos y resultados intermedios, localizar y corregir posibles errores, obtener reglas y algoritmos estrechamente ligados a tales expresiones simbólicas. Por ello, el cálculo escrito potencia el cálculo mental, que no es sino la manipulación interiorizada de los lenguajes tangibles, verbales y gráfico-textuales.

9. Reproducimos a continuación un problema y las soluciones al mismo de tres alumnos. ¿Qué objetos matemáticos representan los símbolos en cada una de las tres soluciones? ¿Cómo operan los alumnos con dichos símbolos? ¿Cómo puede utilizar el profesor las respuestas para detectar errores de comprensión?

Problema. Maria y Pedro dedican una media de 8 horas cada fin de semana a hacer deporte. Otros 8 estudiantes dedican cada semana una media de 4 horas a hacer deporte. ¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes?.

$$\frac{8 + 8 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4}{10} = \frac{16 + 16 + 16}{10} = \frac{48}{10} = 4\frac{8}{10} \text{ horas}$$

$$m = \frac{2 \cdot 8 + 8 \cdot 4}{10} = 4\frac{8}{10} \text{ horas/estudiante}$$

He hecho los cálculos con proporciones y con el resultado he sumado las medias.

$$\frac{2 \text{ días}}{4 \text{ h}} = \frac{2 \text{ días}}{11 \text{ h}} \quad (11 \text{ h} + 8 \text{ h}) = 19 \text{ h}$$

Los sistemas de signos matemáticos desempeñan un papel esencial en el trabajo matemático, de manera que el progreso en la puesta a punto de tales recursos está fuertemente relacionado con el avance de las matemáticas.

Pero no todos los instrumentos semióticos son igualmente eficaces para resolver problemas matemáticos. Pensemos, por ejemplo, en la eficacia del sistema de numeración decimal (numerales indo-arábigos) frente a una representación simple mediante piedrecillas o el sistema de numeración romano; o también, en la mayor eficacia del registro escrito algebraico frente al registro oral característico de la aritmética tradicional.

10. Intenta resolver el siguiente problema suponiendo que no puedes utilizar el álgebra (por ejemplo por tanteo como lo podría resolver un alumno de primaria). Después vuelve a resolverlo utilizando las ecuaciones (por ejemplo como lo resolvería un alumno de secundaria)

a) La edad de Ana es el triple de la edad de Alberto. Las dos edades suman 32. Halla estas edades por tanteo completando la tabla siguiente:

Edad de Alberto	Edad de Ana	Suma de las dos edades
2	$3 \cdot 2 = 6$	$2 + 6 = 8$ El resultado es menor
12	$3 \cdot 12 = 36$	$12 + 36 = 48$ El resultado es mayor
6	$3 \cdot \dots = \dots$	$6 + \dots = \dots$
....		

b) Resuelve el problema anterior utilizando ecuaciones

Una vez reconocidos los papeles instrumentales y representacionales (semióticos) de los recursos manipulativos en la actividad matemática tenemos que analizar su eficacia relativa, el espacio y circunstancias en las que cada manipulativo se revela como mejor adaptado a la función requerida. Así, por ejemplo, diversas investigaciones han mostrado que la aritmética oral es más eficaz que la escrita en ciertos contextos etnomatemáticos; que el ábaco japonés puede superar en eficacia a la calculadora; que, como dice el proverbio, "una imagen vale más que mil palabras". Pero tales ventajas se restringen a ámbitos reducidos y específicos frente a la generalidad de los "manipulativos textuales", como se refleja en el uso del lenguaje algebraico en la mayor parte de las matemáticas.

11. Realiza la suma: $14278 + 1799 + 93219$: a) mentalmente; b) usando numeración romana; c) usando el algoritmo habitual de la suma. ¿Cuál de los tres métodos te parece más eficaz? ¿Qué papel representan los símbolos manipulativos en cada uno de los tres sistemas?

12. Da una lista de situaciones de la vida diaria en que habitualmente se use la aritmética oral.

4.2. El material manipulativo como puente entre la realidad y los objetos matemáticos

Gran parte de la actividad matemática puede ser descrita como procesos de modelización, en el que interpretamos de forma abstracta, simplificada e idealizada un objeto, un sistema de relaciones o un proceso evolutivo que surge de la descripción de la realidad. La construcción de modelos matemáticos, su comparación con la realidad, y su perfeccionamiento progresivo intervienen en cada fase de la resolución de problemas matemáticos, no sólo relacionados con situaciones prácticas, sino también en el trabajo de desarrollo teórico. Este proceso seguiría las cinco fases siguientes:

1. Observación de la realidad
2. Descripción simplificada de la realidad
3. Construcción de un modelo
4. Trabajo matemático con el modelo
5. Interpretación de resultados en la realidad

Ejemplo:

Supongamos que quiero estimar el tiempo que debo esperar cada día en la parada del autobús que tomo para ir a la facultad. En el paso 1 observaré durante algunos días el tiempo que espero, para diferenciar, si es o no constante. Si observo bastante variación y es difícil predecir el tiempo exacto de espera, consideraré que estoy en una situación aleatoria. Para ello debo admitir que la situación es, por lo menos potencialmente, reproducible (tengo que esperar al autobús más de una vez en condiciones similares) y que tiene diferentes resultados posibles, sin que sepamos con seguridad cuál será el que ocurrirá en una experiencia particular (no sé con seguridad el tiempo que debo esperar en la parada a que aparezca el autobús).

Una vez aceptada la aleatoriedad de la situación, en el paso 2 debemos realizar una descripción simplificada de la misma que nos permita pasar de la realidad observada (paso 1) a la construcción del modelo (paso 3). Para ello tomamos unos aspectos de la situación y prescindimos de otros. En el ejemplo del autobús deberemos decidir qué parada elegimos, si esperamos un autobús dado (el número 1) o si contamos el tiempo hasta que aparezca en la parada cualquier autobús. También si diferenciamos la hora del día o el día de la semana o no.

Al comenzar la construcción del modelo (punto 3) de nuevo se precisan una serie de decisiones: ¿aceptamos que el tiempo de llegada del próximo autobús es independiente del que acaba de llegar? ¿trataremos los tiempos como una variable continua? ¿cuáles son otras variables, además del tiempo de espera que me podrían interesar en el trabajo con el modelo?

Una vez que hemos construido un modelo matemático para la situación (por ejemplo aceptamos que los tiempos de espera varían entre 10 y 30 minutos y cualquier tiempo en este intervalo es equiprobable) puedo trabajar con el modelo para obtener resultados "matemáticos".

Finalmente queda todavía la parte más importante: comparar estas conclusiones con el comportamiento real de la situación analizada y decidir que el modelo matemático elegido nos proporciona una buena descripción de la realidad.

El propósito de construir un modelo es obtener una mejor comprensión de una parte de nuestro universo y, así, poder predecirla y si es posible controlarla. Un modelo no es

"real", ni tampoco "verdadero"; en el mejor de los casos es consistente y concordante con las observaciones. Esto se olvida con facilidad y se suele confundir "modelo" y "realidad".

Por otro lado, todos los pasos 1 a 5 son igualmente importantes en la actividad de modelización. Sin embargo, en la clase de matemáticas, con frecuencia nos apresuramos a correr a los pasos 3 y 4 (las "verdaderas" matemáticas) con lo que se impide al alumno apreciar la relación entre matemáticas y realidad así como la aplicabilidad y limitaciones de las matemáticas.

13. Da otros ejemplos de situaciones reales que puedan ser estudiadas con ayuda de un modelo matemático. Para cada una de ella indica en qué forma simplificamos la realidad para poder modelizarla, qué tipo de modelo matemático utilizamos y cómo podemos comprobar que el modelo es útil para describir la realidad.

Utilidad del material tangible en la actividad de modelización

Algunas veces la parte formal del modelo matemático (puntos 3 y 4 del proceso) es demasiado abstracta para la edad de los alumnos, quienes, sin embargo, podrían comprender bien los pasos 1, 2 y 5, así como adquirir al menos intuitivamente alguna comprensión sobre el modelo matemático o sobre alguna de sus propiedades y relaciones. Una pregunta que se plantea el profesor en estos casos es si sería posible llevar a cabo un estudio intuitivo de un problema o de un tema, con ayuda del material concreto o tangible. Aunque este estudio no sería todavía un estudio matemático particular, podría preparar al alumno para una comprensión posterior más completa.

Ejemplo:

Supongamos que planteamos a unos alumnos de primaria la tarea de encontrar cuál de todos los rectángulos de perímetro dado tiene área máxima y, posteriormente, cuál de todos los polígonos regulares de perímetro dado tiene área máxima.

Un estudio formal podría no estar a su alcance, porque se necesitaría la idea de función, para escribir el área en función del perímetro, y también la idea de derivada así como la capacidad de derivar que se adquiere sólo al final de la secundaria.

Sin embargo, podemos proporcionar a los alumnos algunos materiales concretos que les permitan explorar el problema y llegar a una conjetura. Algunos de estos materiales podrían ser:

- Una hoja de papel cuadriculado; podrían tratar el primer problema en forma aproximada, solo para valores discretos, es decir cuando solo se toman medidas enteras del perímetro y área.
- un geoplano y una cinta de longitud fija, no elástica, junto con una regla para medir, papel lápiz y calculadora ordinaria.
- Una calculadora gráfica.
- Un microordenador, dotado de Lenguaje LOGO que el alumno pueda programar.
- Un ordenador dotado del lenguaje CABRI.

Observamos en el ejemplo, que no siempre llegamos a la parte de formulación matemática. Sin embargo, en todos los casos hemos comenzado una actividad de modelización, que será diferente según el material utilizado. Entre el *dominio de la realidad* en que se encuentra la situación que queremos analizar y el *dominio teórico*

donde, con ayuda de las matemáticas construimos un modelo teórico que debe, por un lado, simplificar la realidad y abstraer sólo sus aspectos esenciales y, por otro, ser útil para interpretar los caracteres retenidos en la modelización, podemos situar el *dominio pseudo-concreto* en el que podemos trabajar con los alumnos por medio del material.

En el dominio pseudo-concreto el alumno ya ha salido de la realidad y trabaja con una situación, que siendo ya abstracta e idealizada, permite "concretar" y dar significado a los conceptos y símbolos característicos del dominio teórico, e incluso prescindir de determinados símbolos y representaciones formales que a ciertas edades pueden dificultar más que facilitar la comprensión de los alumnos.

Ejemplo

Cuando el alumno trabaja sólo con papel cuadriculado, prescinde de posibles valores no enteros para los lados de los rectángulos. También supone que todos los cuadros de la cuadrícula son perfectamente cuadrados, prescindiendo de posibles irregularidades. Al mismo tiempo conserva la denominación rectángulo, cuadrado para los resultados de sus dibujos, que pudieran no ser perfectamente regulares. El papel didáctico del modelo pseudo-concreto es inducir implícitamente el modelo teórico a los alumnos, incluso aunque su formulación matemática formalizada no sea posible.

14. Analizar qué simplificaciones de la realidad se hacen para resolver el problema propuesto con cada uno de los materiales sugeridos en el ejemplo anterior. Describir la actividad matemática que se lleva a cabo en el trabajo con cada uno de dichos materiales.

En definitiva, el trabajo con material es muy importante en las primeras etapas de la educación matemática. Las metáforas de "manipular y ver los objetos matemáticos" son esenciales para la comprensión matemática.

4.3. Algunas precauciones

Como toda metáfora, el uso del material concreto en el aprendizaje de las matemáticas resalta unos aspectos de los conceptos que tratamos de enseñar y ocultan otros, por lo que debemos prestar una atención cuidadosa en su uso.

Cuando trabajamos con materiales (por ejemplo, con "polígonos" o "poliedros" de plástico), en cierta forma "manipulamos" y vemos los sistemas de signos matemáticos, pero no los conceptos matemáticos, que son intangibles e invisibles. Es una idea errónea pensar que los conceptos matemáticos, incluso los figurales, están plasmados, reflejados o cristalizados en el material tangible. Los objetos que investiga y manipula el razonamiento geométrico son entidades mentales que Fischbein⁵ denomina *conceptos figurales*, los cuales "reflejan propiedades espaciales (forma, posición y magnitud), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales, como idealidad, abstracción, generalidad y perfección" (p. 143).

⁵ Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24: 139-162.

Ejemplo

El borde de una cara de una moneda, o de la esfera de un reloj NO es una circunferencia, aunque solemos decir “este borde tiene forma de circunferencia”

La circunferencia es un objeto matemático idealizado que no existe en el mundo real. Es una abstracción o generalidad que surge cuando encontramos muchos ejemplos de formas tales como ruedas, relojes, mesas, camilla, etc.

Matemáticamente se define como "el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de uno fijo", o el conjunto de pares de números reales que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. Posiblemente si comprobamos esta propiedad en cada uno de los ejemplos anteriores nunca se cumple con exactitud, aunque sí de una forma aproximada.

En el ejemplo anterior, sin embargo, hablamos de “circunferencia” para referirnos a estas múltiples formas y también en frases como “el área interior de la circunferencia”, “longitud de la circunferencia”, “polígono inscrito a la circunferencia”, etc.

Por tanto la expresión "concepto de circunferencia" es signo de un sistema de prácticas actuativas y discursivas asociada a cierta clase de situaciones problemáticas o descripciones del entorno tal como ya hemos comentado en el capítulo 1. Los objetos matemáticos (técnicas y estructuras conceptuales) provienen de sistemas de prácticas ante tipos de tareas, y no sólo por abstracción empírica de cualidades de objetos ostensivos⁶.

Ejemplo

Si sólo consideramos el "cuadrado" como el concepto geométrico que resulta por abstracción empírica de cualidades de objetos ostensivos que podemos encontrar en nuestro entorno, entenderemos el cuadrado como la figura formada por cuatro lados iguales y con los cuatro ángulos de 90°, pero no podemos entender el "cuadrado" como "construcción geométrica" ni podemos construir el cuadrado a partir de la diagonal o bien a partir del lado. En cambio si manipulamos con un programa informático como el Cabri y realizamos las siguientes construcciones: 1) construcción de un cuadrado a partir de un lado y 2) construcción de un cuadrado a partir de la diagonal el alumno, por una parte, puede aprender y generalizar dos métodos de construcción de cuadrados y, por otra parte, el concepto de cuadrado que tiene el alumno queda enriquecido con la visión de que un cuadrado es el resultado de una construcción geométrica. Así mismo, en el contexto de la "geometría de la tortuga" (lenguaje Logo), la expresión REPITE 4 [AV 30 GD 90] es un cuadrado.

15. Con relación a los conceptos de “recta”, “ángulo”, “medida” analiza la diferencia entre el uso que se hace de estas palabras al trabajar con un material manipulativo o en la vida cotidiana y escolar, y el significado matemático de los términos.

Parte del problema señalado se explica porque con un mismo término del lenguaje nos referimos con frecuencia, tanto a objetos matemáticos abstractos, como a las situaciones concretas modelizadas por dicho concepto. Así, en la clase de matemática, y en los manuales escolares encontramos expresiones tales como:

“Dibuja una recta, un ángulo, recorta un triángulo, muéstrame un plano, etc.”

Como entidades abstractas que son, parece obvio que no se puede dibujar una recta o un ángulo. Lo que el alumno dibuja para realizar estas tareas es un trazo (objeto ostensivo

⁶ Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 14, nº 3: 325-355.

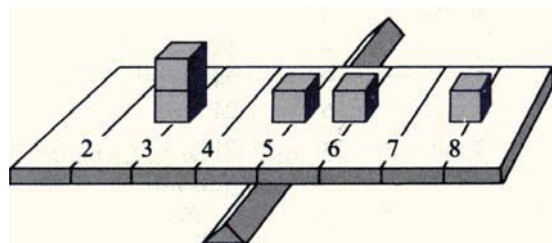
manipulable) que evoca o simboliza el concepto de recta, ángulo (objeto abstracto) correspondiente:

- La recta, como entidad matemática, es ilimitada y carece de espesor, no así los dibujos y representaciones gráficas que se hacen de ella.
- Del mismo modo, un triángulo no es una pieza de material de una forma especial, ni una imagen dibujada sobre el papel. Es una forma controlada por su definición.

En consecuencia, un uso irreflexivo del material manipulativo podría constituir obstáculos para la apropiación efectiva del conocimiento matemático:

- Las acciones matemáticas son virtuales, imaginadas, no reales. Son acciones sobre objetos mentales, "materializados" mediante sistemas de signos específicos.
- El lenguaje y la práctica escolar pueden llevar a confundir entre las propiedades concretas del material manipulativo y los objetos matemáticos que modelizan dichas propiedades. Ello puede impregnar a los objetos matemáticos de unas connotaciones tangibles y visuales de las que progresivamente los alumnos deben desprenderse en los niveles superiores de enseñanza.
- Al mismo tiempo, las manipulaciones puramente sintácticas y formalistas de los sistemas de signos verbales-textuales pueden ocasionar un aprendizaje memorístico, rutinario, desprovisto de sentido para los alumnos.
- Si no se es cuidadoso en separar el material manipulativo del objeto abstracto, el paso de la acción física directa sobre material tangible a la acción imaginada, apoyada en sistemas de signos, puede estar no exento de conflictos.

16. Un tipo de material manipulativo usado para hacer comprensible la idea de media aritmética es una balanza, donde los datos se representan como pesos situados en diferentes posiciones de un tablero (cada dato se sitúa en la posición que indica su valor numérico) y la media es el punto de equilibrio de la balanza (en el ejemplo, el valor 5). ¿Qué conflictos piensas se podrían producir por un uso inadecuado de este material?



4.4. Relación de los manipulativos con las situaciones didácticas

El uso del material debe permitir el planteamiento de problemas significativos para los estudiantes, que puedan ser asumidos por ellos, apropiados a su nivel e intereses, y pongan en juego los conceptos, procedimientos y actitudes buscadas. El material en sí es inerte, tanto si es tangible como gráfico-textual, y puede ser usado incluso de forma indeseable. Los aparatos físicos, ni tampoco los restantes manipulativos, ofrecen experiencia matemática inmediata en sí mismos. La actividad matemática se pone en juego por las personas enfrentadas a tareas que les resultan problemáticas.

Por tanto, lo que se debe considerar como recurso didáctico no es el material concreto o visual, sino la situación didáctica integral, que atiende tanto a la práctica como al discurso, de la que emergen las técnicas y estructuras conceptuales matemáticas.

Ejemplos

Un juego de ruletas puede usarse para trabajar el tema de la probabilidad; para estudiar la idea de sector circular y amplitud y medir diferentes amplitudes, o bien simplemente para hacer un sorteo de un premio en clase, pero sin conectarlo con la clase de probabilidad.

Una calculadora puede usarse sólo para comprobar las operaciones realizadas primero con papel y lápiz, o bien como ayuda en el cálculo mental, o incluso para plantear la idea de redondeo, error absoluto y relativo.

En consecuencia el estudio de las matemáticas requiere enfrentar al alumno a problemas o tareas cuya solución son los conocimientos matemáticos pretendidos. Esta confrontación con situaciones-problemas, inductora de la actividad de matematización, contribuirá, además, a su formación integral como persona, objetivo final del proceso educativo.

Es importante también que el uso del material, no comprometa toda la atención de los alumnos, desplazando la propia reflexión matemática. Usar manipulativos tangibles en la enseñanza de las matemáticas es siempre un medio para un fin, nunca un fin en sí mismo.

Con frecuencia se defiende el uso de distintos sistema de representación para el aprendizaje significativo de las matemáticas, incluyendo las representaciones con material tangible. Pero como afirma Baroody⁷, "desafortunadamente, no hay aún evidencia suficiente disponible para determinar qué modos de presentación son cruciales y qué secuencia de representaciones deberían usarse antes de introducir las representaciones simbólicas" (p. 5). Pensemos, por ejemplo, en la enseñanza a personas invidentes, las cuales pueden aprender cualquier contenido matemático sin el recurso a la percepción visual.

El juego de representaciones puede ser una condición necesaria, pero no suficiente para el aprendizaje matemático. La eficacia relativa de cada sistema de signos desde el punto de vista instrumental nos debe llevar a descartar algunos de estos sistemas y concentrar los esfuerzos en el dominio de herramientas con perspectivas de futuro.

Ejemplo

El ábaco japonés, por ejemplo, es un instrumento de cálculo de extraordinaria eficacia para realizar cálculos aritméticos; compite incluso, una vez adquirida cierta destreza, con el uso de la calculadora. Pero se duda de su valor como recurso didáctico en los primeros niveles de enseñanza debido a sus convenciones particulares de representación de los números y la complejidad de su manipulación. Incluso el uso del ábaco ordinario, aunque es una herramienta excelente y útil, está lejos de ser el remedio para las dificultades de la enseñanza y aprendizaje de la aritmética. "Es más que dudoso, por ejemplo, que el ábaco sea el mejor modelo -o siquiera bueno- para el aprendizaje de la multiplicación o la división"⁸.

El uso del material dentro de una secuencia de situaciones didácticas por parte de los profesores debe estar basado en la reflexión sobre las siguientes preguntas:

- ¿Qué aprenden los alumnos tras un proceso de estudio basado en el uso de un material determinado?
- ¿De qué factores depende el estudio?

⁷ Baroody, A. J. (1989). Manipulatives don't come with guarantees. *Arithmetic Teacher* (October): 4-5.

⁸ Hernan, F. y Carrillo, E. (1988). *Recursos en el aula de matemáticas*. Madrid: Síntesis. (p. 60).

- ¿Podemos aspirar en los niveles de educación obligatoria a que los alumnos adquieran determinadas destrezas en el manejo de sistemas de signos textuales?
- ¿Cuándo y de qué modo dejar de usar material tangible y pasar al textual?

5. RECURSOS TECNOLÓGICOS

Diversas investigaciones están demostrando que los estudiantes pueden aprender más matemáticas y de manera más profunda con el uso de una tecnología apropiada. Hay que tener en cuenta, no obstante, que la tecnología no se debería usar como sustituto de intuiciones y comprensiones básicas; al contrario, deberá enfocarse de manera que estimule y favorezca tales intuiciones y comprensiones más sólidas. Los recursos tecnológicos se deben usar de manera amplia y responsable, con el fin de enriquecer el aprendizaje matemático de los estudiantes.

La existencia, versatilidad y potencia de la tecnología hace posible y necesario replantearse qué matemáticas deberían aprender los estudiantes, y cómo deberían aprender mejor. Pueden aparecer también algunas dificultades:

- Dificultades de aprendizaje del software o la calculadora si el alumno no está familiarizado con el mismo. Ello puede ocasionar que el tiempo, ya limitado, para la enseñanza de la matemática se invierta en el aprendizaje de la tecnología. Por ello se recomienda usar recursos fácilmente manipulables que no añadan complejidad innecesaria a la actividad matemática.
- Dificultad en aceptar datos de la calculadora u ordenador que no han obtenido personalmente. Por ejemplo, algunos alumnos se resisten a tomar como aleatorios los números obtenidos de una calculadora u ordenador, puesto que estos instrumentos siempre producen un resultado exacto y esto contradice la idea de aleatoriedad.
- Dificultad en diferenciar la estimación que proporciona la calculadora u ordenador del verdadero valor teórico; por ejemplo, en probabilidad, dificultad en diferenciar la estimación frecuencial de la probabilidad, obtenida mediante la tecnología del verdadero valor teórico de la probabilidad; en el estudio de las funciones, dificultad en distinguir el límite teórico de una estimación discreta del mismo; en general dificultad de diferenciar lo discreto y lo continuo al trabajar con la tecnología.

5.1. Calculadoras

Las calculadoras y los ordenadores se consideran actualmente como herramientas esenciales para la enseñanza, el aprendizaje y la construcción de las matemáticas. "La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y favorece el aprendizaje de los estudiantes" (NCTM, 2000).

Estos recursos han reducido muchas horas dedicadas al cálculo, permitiendo dedicar más tiempo a tareas interpretativas y eliminando temas, como el cálculo de logaritmos a los que se destinaba mucho tiempo hace unos años.

5.2. Ordenadores

Han sido principalmente los ordenadores los que están cambiando la manera de enseñar matemáticas, debido principalmente a la revolución que hizo que los ordenadores estuvieran a disposición de un mayor número de usuarios, y al desarrollo del lenguaje natural en el manejo del software que hizo accesible su uso.

Los programas de ordenador proporcionan imágenes visuales que evocan nociones matemáticas, facilitan la organización, el análisis de los datos, la graficación y el cálculo de manera eficiente y precisa. Pueden apoyar la investigación de los propios estudiantes en las distintas áreas de matemáticas: geometría, estadística, álgebra, medida y sistemas numéricos. Cuando proporcionamos herramientas tecnológicas, los estudiantes pueden centrarse en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas.

La gran ventaja de los ordenadores es su naturaleza dinámica, su velocidad, y el creciente rango de software que soportan. De esta manera, permiten a los estudiantes experimentar y explorar todos los aspectos de la matemática y tienen oportunidad de poder trabajar sobre preguntas de investigación reales, las cuales brindan mayor interés. Podemos diferenciar los siguientes tipos de software para la enseñanza:

1. *Lenguajes de programación.* En las primeras experiencias de enseñanza, una opción era que los alumnos escribieran sus propios programas de ordenador, por ejemplo en lenguaje LOGO. Esta opción hoy día apenas se usa, aunque todavía encontramos en Internet algunos micro-programas interactivos similares a LOGO.
2. *Paquetes profesionales.* Existe una gran variedad de ellos, como por ejemplo *SPSS*, o *Mathematica*, tan sólo se usan en la universidad y en pocos casos en los últimos cursos de enseñanza secundaria.
3. *Software didáctico.* Debido a la complejidad de los programas profesionales algunos investigadores han realizado adaptaciones de ellos a lo que generalmente se requiere en la clase o han construido su propio paquete didáctico. Un ejemplo es *Fathom*, un medio de aprendizaje para análisis exploratorio de datos y álgebra, y se utiliza en secundaria que incluye manipulación dinámica de diversas representaciones, permite trazar gráficos de puntos, de barras, trazar funciones e importar datos desde Internet. Otro ejemplo es el programa *Clic* que se usa fundamentalmente para diseñar paquetes educativos para la etapa de educación primaria.
4. *Micromundos.* Estos consisten en grupos de programas que sirven para estudiar conceptos particulares. Ejemplos particulares son muchos de los programas interactivos preparados con relación a los estándares del NCTM y que están disponibles en Internet. Entre estos micromundos destaca el programa *Cabri* que está especialmente pensado para su aplicación a la geometría.
5. *Software de uso general,* como por ejemplo las hojas de cálculo, *EXCEL*, *LOTUS*, etc, que son aplicadas en diversas experiencias de clase y brindan un amplio espectro de posibilidades en la enseñanza de conceptos estadísticos, proporcionalidad, o funciones.

Los programas informáticos llamados de "propósito general" como los procesadores de texto, hojas de cálculo, etc. son programas que están disponibles en casi todos los ordenadores y que pueden ser muy útiles para trabajar diferentes contenidos matemáticos. Por ejemplo con el programa *WORD* o con el *PAINT*

podemos trabajar contenidos geométricos como los frisos y mosaicos, mientras que con la hoja de cálculo podemos trabajar aritmética, estadística y probabilidad.

Con relación a la hoja de cálculo hay que destacar los siguientes aspectos: 1) Permite la representación de la información en formato numérico y gráfico y en un formato semialgébrico -si se utilizan fórmulas. 2) La interacción del alumno con una hoja de cálculo le obliga a ser preciso y metódico, 3) La hoja de cálculo produce una variación en "tiempo real". Cada una de las acciones y decisiones que realiza el alumno tienen una respuesta inmediata en la pantalla del ordenador. 4) La hoja de cálculo asume la realización de cálculos matemáticos que pueden ser complicados o "pesados" para el alumno, y le permite dedicar sus esfuerzos a otros objetivos.

6. *Tutoriales*, que son programas desarrollados para la enseñanza personalizada de los estudiantes y para la evaluación.

5.3. Internet

El enorme potencial de esta tecnología y la rapidez con que su uso se está generalizando es especialmente visible en la educación. Destacan entre otras las siguientes posibilidades:

- *Correo electrónico*: que permite enviar y recibir mensajes a través del ordenador y los sistemas de comunicación asociados. Puesto que los mensajes pueden contener documentos de texto o gráficos u otro material informático adosados, posibilita la tutoría a distancia y el trabajo conjunto de profesor y alumnos o varios alumnos, incluso a distancia
- *Listas de distribución y discusión* por correo electrónico, que permiten enviar un mismo mensaje a toda una lista de personas en forma instantánea y podemos utilizar tanto con nuestros alumnos como para intercambiar ideas o soluciones a problemas con otros profesores.
- *Sociedades*: El número de asociaciones educativas y de profesores de matemáticas que construyen sus propias páginas, con información sobre sus actividades y desde las cuales podemos acceder a recursos útiles para la enseñanza de las matemáticas, es cada día creciente.
- *Revistas y boletines*: la revista electrónica constituye una nueva filosofía en la difusión del conocimiento. Por un lado, acorta todo el proceso desde que se remite un trabajo hasta que se publica, y la difusión es potencialmente mucho mayor, pues no hay costes de distribución implicados, por lo que, generalmente, estas revistas se distribuyen libre de coste. No sólo encontramos revistas para los profesores de matemáticas, sino también para los alumnos.
- *Software*: También hay software disponible en Internet y algunos programas pueden cargarse directamente o bien ser solicitados a través de correo electrónico. En otros casos podemos usar cierto software "a distancia". De este modo, Internet suprime las barreras de compatibilidad o de limitaciones de memoria y pone a nuestra disposición el uso "on-line" de otros medios informáticos.
- *Otros recursos didácticos*: incluyen, conjuntos de datos para el trabajo en la clase de estadística, juegos y pasatiempos matemáticos, libros de texto interactivos, notas sobre historia de las matemáticas, etc.

5.4 Video

Actualmente se pueden encontrar videos didácticos que tratan muchos de los contenidos matemáticos de la educación primaria -por ejemplo, la colección *Ojo Matemático*. Si bien el video permite tratar los contenidos de una manera muy diferente a como lo hace un libro de texto puede resultar una actividad muy pasiva para los alumnos. Algunos consejos generales que conviene tener en cuenta son:

- 1) Antes de llevarlo al aula, hay que determinar qué parte se va a usar, por qué y para qué. Se necesita verlo completo para determinar qué segmentos son adecuados para los alumnos.
- 2) No hay que caer en la tentación de querer proyectar todo el video en una sola sesión. Los chicos no tienen la misma retentiva que los adultos, o la que desarrollan cuando van al cine. No hay que sustituir la clase con un video, sino que hay que aprovechar partes del mismo para enriquecer la enseñanza.
- 3) Hay que diseñar actividades que permitan a los estudiantes estar atentos antes, durante y después de ver el segmento del video.
- 4) No es conveniente apagar las luces.

6. JUEGOS

Otro recurso que conviene tener presente son los juegos, sobretudo por su papel motivador. Una de las clasificaciones sobre los juegos es la que considera por una parte los juegos de conocimiento en los que hay que poner en funcionamiento un determinado contenido matemático de la enseñanza primaria y, por otra parte, los juegos de estrategia en los que hay que encontrar la estrategia que permite ganar el juego

<p>17. Clasifica los juegos siguientes como juegos de conocimiento o de estrategia. Para cada uno de ellos comenta el conocimiento que hay que poner en funcionamiento o la estrategia ganadora.</p> <ul style="list-style-type: none">• Escondite• Parchís• La carrera del 20. Se trata de un juego de dos jugadores en el que el jugador que empieza jugando debe decir un número menor que 20 y el contrincante debe decir un número 1 o 2 unidades mayor. Gana el jugador que dice 20 por primera vez⁹.
--

7. DOS POSICIONES EXTREMAS: FORMALISMO Y EMPIRISMO

Los análisis de la actividad matemática llevados a cabo por distintos autores sugieren el importante papel de los medios expresivos para el desempeño de tal actividad, la cual, aunque es esencialmente mental, se apoya en la acción sobre tales instrumentos semióticos. Estos análisis apoyarían, por tanto, el uso de materiales manipulativos tangibles en los primeros niveles de enseñanza siempre que tales recursos sirvieran de apoyo ostensivo para la reflexión matemática y no la limiten.

En las secciones anteriores hemos enfatizado una cierta precaución respecto del uso ingenuo de los manipulativos tangibles. Pero esa actitud es igualmente aplicable

⁹ Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE-Horsori (p. 222).

respecto del uso de los manipulativos gráfico-textuales. En general el empleo de los instrumentos semióticos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas puede caer en dos posiciones extremas:

- *el formalismo*, consistente en un uso exclusivo y prematuro de símbolos formales - con la consiguiente pérdida por parte del alumno del significado fenomenológico de la actividad matemática (conexión con las situaciones- problemas);
- *el empirismo*, esto es, el uso abusivo de materiales tangibles, incluso cuando ya la edad y comprensión del alumno no los hace necesarios, con la consiguiente pérdida del sentido discursivo de la actividad matemática (conexión con la actividad de generalización y abstracción) .

Para superar ambos sesgos se requiere implementar una dialéctica compleja entre los distintos tipos de símbolos y materiales ostensivos que promueva la actividad reflexiva del alumno. Esto precisa un gran esfuerzo de investigación para dilucidar qué materiales usar, cuándo, cómo, con quién, así como sobre las conexiones que se deberían establecer entre los manipulativos tangibles, orales y gráfico-textuales, entre las técnicas y estructuras conceptuales matemáticas y las situaciones-problemas que resuelven y organizan tales estructuras.

C: Seminario didáctico

1. ANÁLISIS DE DOCUMENTOS CURRICULARES

(1) A continuación se presenta un extracto de un documento curricular sobre el uso de recursos en el aprendizaje significativo de las matemáticas.

- 1) Léelo con atención. Subraya los puntos que consideras especialmente acertados.
- 2) ¿Qué papel juega el uso de recursos en el aprendizaje significativo según este documento?

Extracto del documento: Recursos didácticos para la enseñanza de las matemáticas en primaria (MEC)

Señalamos a continuación algunos **aspectos que favorecen el aprendizaje significativo**:

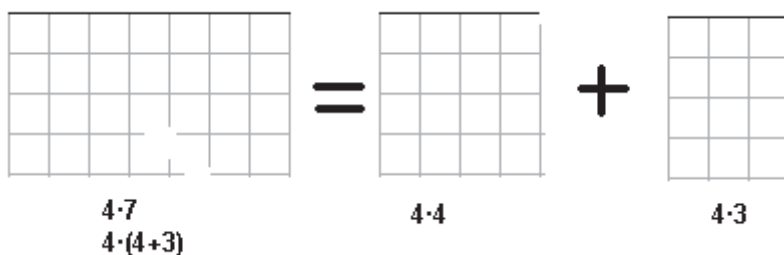
- * Atiende a la diversidad del alumnado, tanto en sus experiencias previas y sus estrategias personales de aprendizaje como en sus capacidades, ya que la actividad puede abordarse de maneras distintas: pueden hacerlo de forma verbal, otros de forma manipulativa o gráfica, etc. La participación de cada niño en la elaboración de conjeturas y la verbalización garantizan la diversidad de enfoques y de lenguajes.
- * Plantea un aprendizaje funcional y significativo al considerar la conveniencia de partir de los intereses de los niños y las niñas, y de situaciones reales para establecer relaciones con sus conocimientos anteriores y elaborar conjuntamente definiciones y generalizaciones.
- * Permite también integrar conceptos, procedimientos y actitudes en una misma secuencia de aprendizaje, ya que, a través de procedimientos, es decir de “hacer” alguna cosa, ya sea contar, clasificar, representar, etc., se llega a sacar conclusiones y a generalizar, y con ello a los conceptos; sin olvidar que las actitudes de participación, gusto por el trabajo, por la precisión, etc., se adquieren simultáneamente.

Difícilmente se pueden garantizar estas condiciones en una secuencia en la que se empieza por la definición, se pasa a exponer algunos ejemplos y después se presentan ejercicios para practicar. Este es un planteamiento que, por desgracia, es muy frecuente todavía en nuestras escuelas, y que sólo garantiza la uniformidad, que relaciona poco o nada los aprendizajes con las situaciones de la vida diaria y que fomenta actitudes muy negativas frente a la matemática.

2. ANÁLISIS DE ACTIVIDADES Y LIBROS DE TEXTO

(2) Examina en un libro de texto de primaria si se incluyen actividades que requieran el empleo de materiales manipulativos.

(3). En una clase la maestra ha utilizado papel cuadriculado de la siguiente manera:



¿Qué contenido matemático se está trabajando en esta actividad?

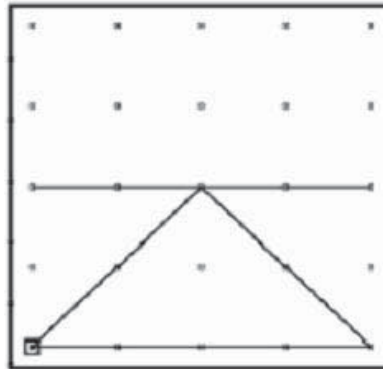
(4) Explica como y con qué material justificarías a un alumno de primaria la propiedad asociativa $2 \cdot (3 \cdot 5) = (2 \cdot 3) \cdot 5$

(5) Utilizando el plegado de papel:

- Trazar la perpendicular por un punto A a una recta r.
- Trazar la paralela por un punto A a una recta r.
- Trazar la bisectriz de un ángulo.
- Construir un pentágono regular.

(6) ¿Cuál es el objetivo de la siguiente actividad? ¿Crees que el uso del geoplano permite realizar esta actividad en el primer ciclo de primaria?

En un geoplano de 5x5 construye el triángulo de la siguiente figura y su simétrico respecto de la línea horizontal



(7) En un libro de texto se propone el siguiente método para dibujar un diagrama de sectores.

- Explica por qué este procedimiento es correcto.
- Explica cómo se puede determinar el centro del círculo
- Busca en un libro de texto el procedimiento normal para dibujar un diagrama de sectores. ¿Qué tipo de contenido matemático se evita utilizando este procedimiento?
- ¿Qué tipo de material se evita utilizando este procedimiento?

Para dibujar un gráfico de sectores para esta tabla de datos, has de seguir los pasos siguientes:

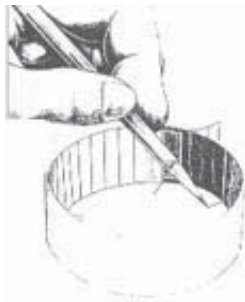
Edad	Frecuencia absoluta
7	3
8	2
9	3
10	4
11	6
12	2
Total	20

1) Coge una tira de cartulina de 24 cm de largo por 5 cm de alto. Dibuja 20 rectángulos de base 1 cm. A continuación pinta 3 de color azul, 2 de color verde, 3 de color amarillo, 4 de color negro, 6 de color rojo y 2 de color marrón.



2) Une con pegamento los extremos de la tira de cartulina, de manera que los 4 rectángulos sin colorear queden por detrás de los segmentos coloreados y la tira forme un anillo con los colores hacia adentro.

3) En una hoja se traza una circunferencia utilizando la tira del apartado anterior. Marca el principio y el final de cada color



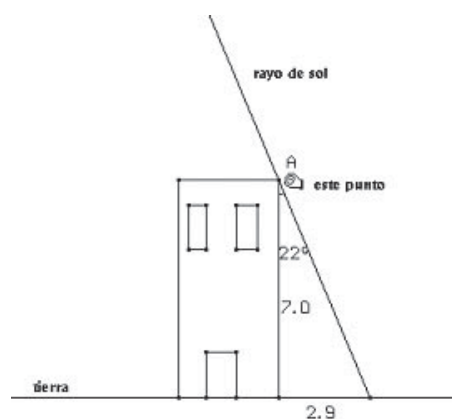
4) Determina el centro de la circunferencia y une las marcas con el centro. Por último colorea cada sector con el color correspondiente.

3. EL MATERIAL MANIPULATIVO COMO PUENTE ENTRE LA REALIDAD Y LOS OBJETOS MATEMÁTICOS¹⁰

(8) A continuación tienes una secuencia de actividades que permite modelizar una situación "real". El modelo matemático se corresponde con el currículum de la ESO, pero la utilización de un programa de geometría dinámico como el Cabri permite considerar la posibilidad de utilizar esta secuencia de actividades con alumnos de primaria. Después de leer las actividades y de pensar cómo las podría resolver un alumno de primaria, contesta:

- ¿Qué situación "real" se está modelizando?
- ¿Qué contenido matemático sirve para modelizar esta situación "real"?
- El contenido del apartado anterior, ¿con qué notación se representa en la ESO?
- ¿Es adecuado introducir el contenido del apartado b en primaria? ¿Y la notación que lo representa en la ESO?
- ¿Crees que la secuencia de actividades que sigue es apropiada para alumnos de 6º de primaria?

1. La figura de la pantalla del ordenador es un edificio de 7 m de altura que tiene una sombra de 2,9 m. Si sitúas el puntero del ratón en el punto A y lo mueves hacia arriba y hacia abajo, observarás cómo aumenta o disminuye la altura del edificio. ¿Qué le ocurre a la sombra del edificio al aumentar su altura? ¿Y si disminuye la altura?



2. La figura anterior nos permite observar la sombra que tienen, a la misma hora, edificios de alturas diferentes.

a) Completa la siguiente tabla:

Altura (m)	Sombra (m)
4	
8	
12	
16	

b) Si doblamos la altura de un edificio, ¿qué le pasa a su sombra? ¿Y si la triplicamos? ¿Y si la cuadruplicamos?

¹⁰ Font, V. (1996). *Incidencia del micro-mundo Cabri-géomètre en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad de magnitudes. Un ejemplo de su utilización en el aula.* (Comunicación presentada en el ICME-8, Sevilla).

d) Divide cada altura por su sombra. ¿Observas alguna relación entre las alturas de los edificios y sus sombras?

e) Variando la posición del punto A de la pantalla anterior, resuelve el siguiente problema: “ Juana ha medido, a la misma hora, algunos objetos (árboles, edificios, monumentos, etc.) y sus sombras, pero no ha tenido tiempo de hacer todas las mediciones. Completa la tabla de Juana.”

Altura de los objetos (m)	Sombras (m)
3,5
7	2,9
.....	5,8
21	8,7

4. CALCULADORAS

(9) Describir algunos de los beneficios de usar calculadoras en las clases de matemáticas. ¿Cuáles son algunos de los argumentos que suelen decirse en contra del uso de calculadoras en la enseñanza de la aritmética?

(10) Después de efectuar las siguientes restas con la calculadora: $9-1$, $98-21$, $987-321$, $9876-4321$, $98765-54321$, haz una predicción del resultado de las restas $987654-654321$ y $9876543-7654321$ y da una justificación de esta predicción.

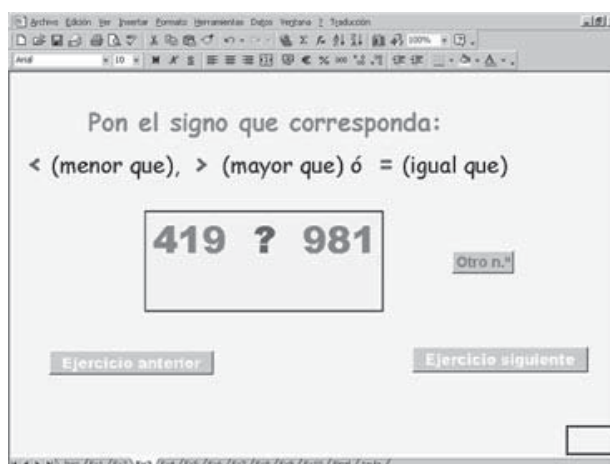
(11) Las calculadoras tienen posibilidades que podríamos calificar como "lúdicas" o "curiosidades". Un ejemplo lo tenemos en actividades como la siguiente en las que la última respuesta se obtiene girando 180° el resultado de la pantalla de la calculadora a la pregunta anterior:

Un camión que transporta 1725,23 kg de naranjas, ha perdido 16,5 kg por el camino. ¿Cuántos kg de naranjas tiene aún el camión? ¿Qué es imprescindible para escribir esta respuesta?

5. PROGRAMAS INFORMÁTICOS

(12) Estudia estas actividades basadas en el uso de una Hoja de Cálculo desde la perspectiva del maestro: ciclo, objetivo, contenidos, etc. Explica las ventajas de utilizar la hoja de cálculo en lugar de hacer el ejercicio con lápiz y papel.

1) *Aritmética*. En la hoja de cálculo que sigue el alumno ha de escoger entre tres posibilidades. Si escoge la correcta el ordenador contesta Muy Bien. Si la elección no es la correcta el ordenador contesta que vuelva a intentarlo. Con el botón *Otro n.º* el ordenador propone la misma actividad con números diferentes. Las opciones *Ejercicio anterior* y *siguiente* permiten pasar a actividades más fáciles o más difíciles.



2) *Cálculo mental*: En la hoja de cálculo que sigue el alumno ha de escoger un número entre 1 y 100. Si este número coincide con el que ha pensado el ordenador recibe la siguiente respuesta: Has acertado. Si el número es menor o mayor el ordenador responde indicándolo. El ordenador también cuenta los intentos. Con el botón *Inicio* el ordenador propone la misma actividad con números diferentes.

Comenta esta actividad desde la perspectiva del maestro: ciclo, objetivo, contenidos, etc. Explica las ventajas e inconvenientes de utilizar la hoja de cálculo en lugar de hacer este juego sólo con cálculo mental. ¿Cuál es la estrategia que hay que seguir?

	A	B
1	Si quieres que el ordenador piense	
2	un número entre 1 y 100 pulsa el botón	
3	de comienzo	
4	Valor propuesto	<input type="text" value="26"/>
5	Número de intentos	<input type="text" value="8"/>
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		<input type="button" value="COMIENZO"/>
13		

3) Confecciona una hoja de cálculo que permita resolver por tanteo el problema propuesto en la actividad 10

6. INTERNET

(13) Visita las siguientes páginas web y explora los recursos disponibles para la enseñanza de las matemáticas en primaria:

<http://www.pangea.org/~acte/sebas/Volta%20Espanya/castella.htm>

<http://matti.usu.edu/nlvm/nav/vlibrary.html>

<http://illuminations.nctm.org/index2.html>

(14) Busca en Internet páginas que tienen por objetivo el intercambio por Internet de problemas de matemáticas entre escuelas, el aprendizaje cooperativo, etc.

BIBLIOGRAFÍA

- Corbalán, F. y Deulofeu, J. (1996). Juegos manipulativos en la enseñanza de las matemáticas. *UNO*, 7, 71-80.
- Coriat, M. (2001). Materiales didácticos y recursos. En, E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 61-82). Madrid: Síntesis.
- Hernan, F. y Carrillo, E. (1988). *Recursos en el aula de matemáticas*. Madrid: Síntesis.
- Llinares, S. y Sánchez, M. V. (1998). Aprender a enseñar matemáticas: Los videos como instrumento metodológico en la formación inicial de profesores. *Revista de Enseñanza Universitaria*, 13, 29-44.
- Cascallana, M.T. (1988). *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos*. Madrid: Santillana.
- Marín, M., España, A. y Cruz, C. (1994). Telematemáticas. *Suma*, 14-15, 65-68.
- Udina, F. (1989): *Aritmética y calculadora*. Madrid: Síntesis

